EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN Dr H. STREEFKERK EN P. WIJDENES
OFFICIEEL ORGAAN VAN LIWENAGEL EN VAN WIMECOS

24e JAARGANG 1948/49
Nr 6

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen. Prijs per jaargang *f* 8.00*. Zij die nevens op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde (*f* 8.00*) zijn ingetekend, betalen *f* 6.75*.

De leden van **L i w e n a g e l** (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van **W i m e c o s** (Vereeniging van leeraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie aan Hogere Burgerscholen en Lycea) krijgen Euclides toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van Liwenagel storten de abonnementskosten ten bedrage van *f* 2,50 op de postgirorekening no. 59172 van Dr. H. Ph. Baudet te 's-Gravenhage. De leden van Wimecos storten hun contributie voor het verenigingsjaar van 1 September 1948 t/m 31 Augustus 1949 (waarin de abonnementskosten op Euclides begrepen zijn) ten bedrage van *f* 4,50 op de postgirorekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. Ook voor 1 September 1949—1 September 1950 is de contributie vastgesteld op *f* 4,50. De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593 van de firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van Liwenagel of Wimecos. Deze bedragen *f* 6,75 per jaar franco per post.

Artikelen ter opneming te zenden aan Dr H. Streefkerk, Hilversum, Van Lenneplaan 16, Tel. K 2950; 5558.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstr. 88; Tel. K 2900; 27119.

INHOUD.

Blz.

Prof. Dr. J. A. SCHOUTEN. Over de wisselwerking tussen wiskunde en mechanica in de laatste 40 jaar. (Vervolg) 273
P. WIJDENES. De ongelijkheden in de schoolmeetkunde 283
Dr. JOH. H. WANSINK. Plaats en betekenis van het onderwijs in de beschrijvende meetkunde op de H.B.S. 294
S. J. GEURSEN. De meetkunde in de eerste klas 308
Mededeling van het Math. Centrum 313
Boekbespreking. 314
Ingekomen boeken 316
Inhoud van jaargang 24 317

Oordeel over Eindexamenvraagstukken van 1949.

In verband met het op de laatste Algemene Vergadering aangenomen voorstel zal het Bestuur van Wimecos het op prijs stellen een goed gefundeerd oordeel over de eindexamenvraagstukken van het jaar 1949 te ontvangen. Indien de opmerkingen der leden hier aanleiding toe geven, kunnen dan aan de autoriteiten bepaalde wensen ter kennis gebracht worden. De Secretaris: J. J. TEKELENBURG.

riant [1]) kan men voor draaiingen in de R_6 werkelijk met één der 4-dimensionale spinruimten uitkomen, en dat leidt dan precies tot dezelfde spinruimte die zich ook uit de Plücker-Klein'sche correspondentie laat afleiden.

Ten tweeden male was dus nu, omstreeks 1934, de conforme meetkunde op den voorgrond gekomen en wel van een geheel onverwachte zijde. Niet ten onrechte kon ik dan ook in mijn rectoraatsrede van 1939 de verwachting uitspreken dat het getal 6 eerlang in de physica een zeer belangrijke rol zou gaan spelen, te meer, omdat het aan Haantjes en mij inmiddels gelukt was een principieele moeielijkheid, die een conforme theorie in den weg scheen te staan, geheel uit den weg te ruimen.

Er is namelijk een incongruentie tusschen de 4 gewone ruimte-tijd-coördinaten en de 6 locale coördinaten in iedere locale ruimte-tijd, die ontstaan wanneer men aan die lokale ruimte-tijd, een conforme meetkunde toekent. Men zou derhalve in de groote ruimte-tijd-wereld 6 homogene v. Dantzig'sche coördinaten willen gaan gebruiken. Daarbij treedt nu een moeielijkheid op. Ligt in een gewone vlakke projectieve ruimte van 3 afmetingen een oppervlak, dan is bekend dat de twee asymptotische richtingen in elk punt vanzelf in dat oppervlak een conforme metriek vastleggen (niettegenstaande er in de ruimte *geen* metriek was) en dat de 4 homogene coördinaten in de ruimte op dat oppervlak als overtallige conforme coördinaten kunnen worden gebruikt. Omgekeerd kan men nu, uitgaande van een tweedimensionale ruimte met een conforme meetkunde, een driedimensionale vlakke projectieve ruimte construeeren die die tweedimensionale bevat èn men kan bewijzen, *dat twee op zoodanige wijze geconstrueerde ruimten niet wezenlijk verschillen*, d.w.z. dat zij op elkaar invariant en eeneenduidig kunnen worden afgebeeld. Deze afbeeldbaarheid is natuurlijk zeer belangrijk, men zou immers anders behalve de conforme meetkunde nog de een of andere ongewenschte hulpinvariant noodig hebben om de ruimte te kunnen vastleggen.

In meer afmetingen geldt precies hetzelfde *mits* men eischt dat de conforme meetkunde conformeuclidisch is [2]). Dat kunnen we echter juist niet gebruiken, de ruimte-tijd-wereld zou dan „leeg" blijven. Wij bewezen nu 1935—'36 [3]) dat, uitgaande van een alge-

[1]) Deze invariant zal elders worden behandeld.

[2]) D.w.z. transformeerbaar in een euclidische ruimte door middel van een conforme transformatie.

[3]) Proc. Kon. Akad. v. Wet. 38 (1935) 706—708; 39 (1936); Math. Ann. 112 (1936) 594—629; 113 (1936) 568—583.

meene n-dimensionale conforme meetkunde steeds een $(n + 1)$-dimensionale ruimte met een bepaalde projectieve overbrenging kan worden geconstrueerd, die de n-dimensionale ruimte bevat, en dat verschillende aldus geconstrueerde ruimten *niet wezenlijk verschillen* mits òf n oneven is òf $n = 4$ is, maar in dit laatste geval dan ook een zekere projectieve tensor van de valentie 2 (van de orde 4 in de afgeleiden van den fundamentaaltensor) verdwijnt. Gelukkig kon ook nog worden bewezen, dat die tensor steeds nul is wanneer de ruimte-tijd-wereld conform-einsteins [1]) is, dus precies in het geval dat de physica noodig heeft. Verder kwam aan het licht dat de massa geen conforminvariant is maar wel het product van een massa met een lengte en werd er in verdere publicaties van Haantjes aangetoond dat er een verband bestaat tusschen conforme transformaties en versnelde systemen [2]).

Bij iedere theorie in 6 coördinaten treedt er natuurlijk een veralgemeening van den materietensor op, die een matrix heeft van 6 rijen en 6 kolommen. De vijfde rij en kolom waren reeds in de projectieve theorie door de electromagnetische verschijnselen ingenomen en men zou dus omstreeks 1935 hebben kunnen opmerken dat, waar zoowel de invariantie van Cunningham en Bateman als de theorie van de spinruimte kennelijk invoering van een zesden coördinaat vroegen, er vermoedelijk een nog niet ontdekt natuurverschijnsel moest bestaan dat de zesde rij en kolom zou kunnen vullen. Merkwaardigerwijze werd echter deze zoo voor de hand liggende opmerking noch door ons noch voor zoover mij bekend door Amerikaansche onderzoekers gemaakt. Ware dit wel het geval geweest, dan zou het mesonveld, dat in 1935 door Yukawa werd voorspeld omstreeks denzelfden tijd dubbel voorspeld zijn. De geschiedenis nam echter een ander verloop, de conforme theorie verzuimde het mesonveld te eischen, maar het mesonveld kwam er langs een anderen weg en eischte een conforme theorie.

Nadat Yukawa 1935 [3]) op het denkbeeld gekomen was de in de kern optredende krachten terug te voeren tot een speciaal soort veld, correspondeerende met een nieuw soort deeltjes, ontdekte Kemmer [4]) in 1938 dat, in de plausibele onderstelling dat de uitdrukking voor de energie positief definiet is, de golffunctie der

---

[1]) D.w.z. transformeerbaar in een einsteinsche ruimte door middel van een conforme transformatie.

[2]) Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet 43 (1940) 1288—1299, opnieuw ontdekt door E. L. Hill, Phys. Rev. 72 (1947) 143—149.

[3]) Proc. Phys. Math. Soc. Japan 17 (1935) 48.

[4]) Proc. Cambr. Phil. Soc. 34 (1938) 354.

nieuwe deeltjes de valentie 2 moest hebben. Daaruit volgde dan het bestaan van vier soorten mesonvelden, het scalaire mesonveld met 5 en het vectorische mesonveld met 10 kentallen en twee velden die ontstaan door verwisseling van scalar en vector met pseudoscalar en pseudovector. Möller en Rosenfeld [1]) vonden daarop in 1940 dat de experimenten juist een zeer speciale combinatie van scalair en vectorisch veld verlangden en daarop ontdekte Möller [2]) in 1941 dat juist die speciale combinatie als het ware vanzelf voor den dag kwam als men 5 coördinaten invoerde. Het belangrijke hiervan was niet zoozeer het vinden van die combinatie, die zooals later bleek niet de eenige en misschien niet eens de beste was, maar het feit dat het door invoering van een meer omvattende fundamenteele groep (hier de projectieve) mogelijk bleek relaties tusschen verschillende velden te fixeeren. Noch belangrijker was echter de vondst van Lubanski en Rosenfeld [3]), die in 1942 konden bewijzen dat de typische relaties tusschen de matrices in de golfvergelijkingen van het mesonveld identiek zijn met de zoogenaamde structuurvergelijkingen van de groep der draaiingen in R_6, d.i. de conforme groep in 4 afmetingen.

Ten derden male kwam zich dus de conforme groep ongevraagd aanmelden. Thans kwam het echter tot een regelrechte uitnoodiging. B. Hoffmann, opmerkzaam geworden op de 5-dimensionale behandeling van het mesonveld, vatte zijn vroegere met Veblen doorgevoerde onderzoekingen over projectieve relativiteit weder op en trachtte 1947 [4]) de veldvergelijkingen af te leiden uit een variatieprincipe in 5 coördinaten. Daar de resultaten niet zeer bevredigend waren overwoog hij reeds in dat jaar de mogelijkheid van een conforme behandeling en werkte dit denkbeeld uit in twee verhandelingen in 1948 [5]). Hij gebruikt nog niet de conforme groep maar een ondergroep en zijn onderzoekingen, die hij zelf nog als exploraties betitelt zijn nog allerminst afgesloten. Dit neemt niet weg dat hem de eer toevalt als eerste het conforme character van het mesonveld te hebben doorzien en het getal 6 optredende in de golffunctie te hebben verklaard.

Ook de onderzoekingen van H. Flint zijn misschien in verband te brengen met een conforme mesontheorie, hoewel zij uit een geheel andere bron stammen. Evenals Yositaka Mimura trachtte

---

1) Danske Vid. Selsk. math.-fys. Medd. 17 (1940).
2) Danske Vid. Selsk. math.-fys. Medd. 18 (1941).
3) Physica 9 (1942) 117—134.
4) Phys. Rev. 72 (1947) 458—465.
5) Phys. Rev. 73 (1948) 30—35; 1042—1046.

hij reeds 1935—'37 [1]) de lengte van het lijnelement te vervangen door een matrix. Van 1940 [2]) af gebruikt hij 5 coördinaten. Hij gaat uit van een geunificeerde theorie en introduceert dan een mesonveld door middel van een ykfacor in de maat op dezelfde wijze als Weyl dat deed in de 4-dimensionale theorie. Zijn mesonveld staat dus in dezelfde verhouding tot gravitatie-electromagnetisme als het electromagnetische veld tot de gravitatie. Nu riekt deze variabele ijkfaktor sterk conform en men komt er dus vanzelf toe zich af te vragen of niet de invoering van 6 coördinaten zou kunnen leiden tot een belangrijke vereenvoudiging van Flint's theorie. Er is een bezwaar, Flint schijnt te werken met invariante lengten en massa's terwijl conform alleen het product van massa en lengte invariant kan zijn, maar dat kan liggen aan het totaal andere uitgangspunt, dat een vergelijking uiterst moeielijk maakt.

In het voorgaande heb ik aan de hand van een aantal voorbeelden getracht te schetsen hoe telkens weer wiskunde en physica stimuleerend op elkaar inwerken. Bezien wij deze inwerking nader en vestigen wij de aandacht speciaal op effecten van groot formaat, dan zien wij schematisch de folgende figuur [3]). Op wiskundig gebied is er eerst een tijdperk waarin een groote hoeveelheid materiaal wordt bijeengebracht en tot een geordend geheel verwerkt. Daarbij wordt niet gedacht aan practische toepassing maar zucht naar weten en naar aesthetische bevrediging schijnt de eenige drijfveer te zijn. Kenmerkend voor deze periode is ook een groot enthousiasme bij de beoefenaars. Na deze periode, die ik met den naam van „mathematische voorbereiding" wil aanduiden, dreigt een zekere zelfvoldaanheid tot stilstand te voeren. Intusschen hebben zich in de physica allerlei moeielijkheden opgehoopt [4]), die langzamerhand onhoudbaar worden. Dan komt de inslag, een mathematisch voldoende georiënteerd physicus maakt gebruik van het gedurende de mathematische voorbereiding opgehoopte en geordende materiaal en ontketent in de physica een verlossende omwenteling. Achteraf bezien lijkt dan alles erg eenvoudig en verbaast men er zich over dat de physica den sleutel niet al lang zelf had gevonden. De physica gaat nu haar materiaal opnieuw ordenen en nieuw materiaal vergaren. Daarbij wordt niet gedacht aan eenig

---

[1]) Proc. Roy. Soc. 150 (1935) 421—441.

[2]) Phil. Mag. 29 (1940) 330.

[3]) Met „wiskunde" en „physica" duid ik voor het gemak die bepaalde onderdeelen dier wetenschappen aan, die ter sprake komen.

[4]) Men denke bijv. eens aan mechanische aethermodellen e.d.

nut voor de wiskunde, eenige drijfveer schijnt te zijn zucht tot ordelijke aansluiting aan het experiment en de periode, die we „physische voorbereiding" zullen noemen, kenmerkt zich weer door groot enthousiasme. Het proces wordt met aandacht gevolgd door eenige physisch voldoend georiënteerde mathematici en een van hen vindt in al die nieuwe denkbeelden plotseling iets dat voor de wiskunde een geheel nieuwe inslag beteekent. De mathematische molen komt weer op gang en draait lustig verder, waarbij men achteraf weer verbaasd is een inductie van de physica noodig gehad te hebben. Schematisch zien wij dus dat een mathematische voorbereiding door een inslag voert tot een physische nawerking, die na consolidatie physische voorbereiding wordt voor een inslag met mathematische nawerking, enz. Natuurlijk beweer ik niet dat de volgens dit schema verloopende wisselwerking tusschen wiskunde en physica de eenige is. We hebben immers ook uitdrukkelijk alleen naar groote effecten gekeken. Het andere uiterste, de voortdurende dagelijkse wisselwerking, de gewone mathematisch-physische „kleinhandel", bestaat even goed en er zijn tal van tusschenvormen.

Maar bezien wij enkele voorbeelden. De consolidatie van de meetkunde in de Klein'sche school vormde de mathematische voorbereiding voor den relativistischen inslag in de physica; verdere ordening en consolidatie tot algemeene relativiteitstheorie was de physische voorbereiding voor den inslag van het pseudoparallelisme in de wiskunde. Intusschen was er in de wiskunde een andere periode van voorbereiding aan den gang, waarin eenerzijds representatietheorie van eindige en oneindige groepen, anderzijds theorie van eigenwaarden en eigenfuncties werden ontwikkeld, die juist materiaal konden leveren dat voor den quantenmechanischen inslag in de physica onontbeerlijk was. De zich consolideerende quantenmechanica gaf weer den stoot aan allerlei zuiver mathematische onderzoekingen, te midden waarvan wij ons thans bevinden en die nog moeielijk te overzien zijn en inmiddels had de wiskunde er via pseudoparallelisme en objecttheorie al weer voor gezorgd dat nieuwe vormen van meetkunde als algemeene projectieve en conforme gereedstonden toen de physica die zou blijken noodig te hebben. Telkens dus een werken op eigen gebied, *bewust* met op dit eigen gebied gerichte doelstellingen doch *onbewust* vóórwerkend voor het andere gebied. De hier gesignaleerde figuur is zeer in het oog vallend en dan ook niet onopgemerkt gebleven. Verschillende schrijvers hebben op het bestaan van een dergelijk eigenaardig verband genezen. Reeds in 1914 schreef Voss [1]) „Hätten

[1]) Die Beziehungen der Mathematik zur Kultur der Gegenwart, Berlin 1914.

die Griechen, unbekümmert um eine praktische Anwendung, nicht die Theorie der Kegelschnitte entwickelt, so würde Kepler wohl kaum das Geheimniss der Planetenbewegung enträtselt haben" en hij geeft daar ter plaatse nog een aantal andere treffende voorbeelden en een desbetreffend citaat van v. Humboldt. F. Klein wijst er in zijn bekende „Vorlesungen über die Entwiklung der Mathematik im 19-ten Jahrhundert" met nadruk op [1]) „dass die Physiker die mathematischen Hilfsmittel, dessen sie sich bei der Durchführung ihrer modernen Spekulationen bedienen, in der Mathematik des 19. Jahrhunderts fertig ausgebildet vorfinden" en spreekt zijn meening over dit feit wel zeer duidelijk uit waar hij op een andere plaats zegt [2]): „Hier möchte ich nun auf den eigentümlichen Zusammenhang der reinen und angewandten Wissenschaft hinweisen, den ich nach Leibnizschem Vorbild als ‚prästabilierte Harmonie' bezeichne, und der bewirkt, dass die Theorie sehr häufig gerade die Gebilde schafft und ausbaut aus rein wissenschaftlichem Trieb, welche die Anwendung bald darauf zur Bewältigung der ihr von aussen zuströmenden Problemen benötigt." Ook Weyl [3]) spreekt 1928 van de „unverkennbare geheimnissvolle Parallelität" tusschen moderne wiskunde en physica en Slater [4]) wijst er 1946 op dat telkens weer een vooruitgang in de physica de meest waardevolle ontwikkelingen in de wiskunde stimuleert. Dit zijn zoo enkele plaatsen, die mij toevallig in de herinnering bleven. Historici kennen er stellig veel meer. Het belangrijke punt is, dat hier wordt erkend of althans vermoed dat er tusschen twee gebieden van menschelijke werkzaamheid [5]) een soort van, al of niet collectieve, onbewuste doelgerichte werking bestaat van hetzelfde soort als men die aantreft bij organismen of groepen van organismen. Dat zou dan met zich brengen dat in het beschrijvingsschema naast causale ketens ook finale ketens zouden moeten worden opgenomen. Uitdrukkelijk moet er echter op worden gewezen, eenerzijds, dat men tegenwoordig in het toelaten van finale ketens niets onwetenschappelijks meer ziet, anderzijds dat het gebruik van zulke ketens niets te maken heeft met de populaire teleologie die de natuur als geheel volgens het een of andere wijze plan wenscht te zien ingericht. Van volkomen onverdachte positivistische zijde

[1]) L.c. II 135.

[2]) L.c. I 150.

[3]) Gruppentheorie und Quantenmedranik, voorwoord eerste druk.

[4]) Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946) 392—400.

[5]) Wat hier voor twee speciale gebieden is geformuleerd zou natuurlijk voor alle gebieden moeten gelden.

wordt dit duidelijk erkend, bijv. waar Jordan zegt dat de finale wijze van beschouwing een onontbeerlijk element der biologische begripsvorming is [1]) en waar hij verklaart dat een dusdanig in gebruik nemen van finale beschrijvingselementen in geen enkel opzicht de deur opent voor enige vorm van mystieke of metaphysische „natuurverklaring". Dit laatste is trouwens vanzelfsprekend daar het een positivist nooit te doen is om een natuurverklaring (die hij als schijnprobleem beschouwt) maar alleen om begripsverheldering door doelmatig geordende natuurbeschrijving. Ook behoeft er allerminst angst te bestaan dat finale beschouwingswijzen zouden kunnen voeren tot bespiegelingen over een „laatste doel". De quantenmechanica heeft toch geleerd dat het wel zin heeft van afzonderlijke causale ketens gebruik te maken, die echter principieel nooit tot één causaal geheel kunnen worden samengesmeed, en waar men dus wel bezwaarlijk kan onderstellen dat het met eventueele finale ketens anders gesteld zou zijn, blijken het „laatste doel" te zamen met de „eerste oorzaak" ficties te zijn, die slechts door ongeoorloofde extrapolaties konden ontstaan.

In de eerste plaats moet nu de vraag worden beantwoord of het bestaan van finale ketens in het schema der wisselwerking tusschen wiskunde en physica aan de ervaring kan worden getoetst. Aan de hand van een bepaalde wel geconstateerde voorbereidingsperiode bijv. in de wiskunde zou men moeten gaan voorspellen dat juist de hier opgehoopte stof weldra in de physica noodig zou zijn. Het werkelijke verloop geeft dan de toetsing. Ook kan men in het verleden teruggaan en vindt dan toetsing in het bekende historische verloop. Zulk een onderzoek is zeker mogelijk, maar het kan alleen worden uitgevoerd door werkelijke historici, die niet alleen groote bekwaamheid moeten bezitten, maar bovendien zoo vertrouwd moeten zijn met vele uiteenloopende gebieden van wiskunde en physica, dat zij met die geheele stof meeleven en alle verbanden als het ware voelen. Er is nog een andere weg, die veel minder goed is, maar op een betrekkelijk gemakkelijke manier voert tot een zij het dan ook minder betrouwbaar resultaat. Men kieze een onderwerp uit de physica en ontwerpe aan de hand van uitspraken van goede physici (niet van mathematici!) een prognose van de mathematische middelen, die vermoedelijk op dat gebied noodig zullen worden. Vervolgens dient te worden nagegaan of er nu inderdaad groepen van wiskundigen zijn, die zich uit zuiver theoretisch interesse met élan op deze onderwerpen hebben geworpen en of deze

---

[1]) Anschauliche Quantentheorie, Berlin 1936, 287, 292.

groepen al tot een zekere consolidatie gekomen zijn. Vooral aan dat élan hecht ik veel waarde. Overal waar in de natuur onbewust doelgerichte handelingen plaats hebben, worden deze, zooals bekend is, met een onmiskenbaar élan uitgevoerd. Klopt een en ander niet, dan spreekt dit tegen de organische opvatting, klopt het echter wel dan moet men natuurlijk het werkelijke verloop nog afwachten maar er is althans een merkwaardig samentreffen geconstateerd.

Als voorbeeld kies ik hier de kernphysica. Vele physici zijn het er duidelijk over eens dat in het kleine onze gewone ruimte-tijd geometrie niet meer opgaat. Bohr [1]) spreekt 1926 van een „tiefgehendes Versagen des raumzeitlichen Bildes mittels welches man bisher die Naturerscheinungen zu beschreiben versuchte"; Pauli [2]) zegt 1933 dat niet alleen het veldbegrip maar ook het ruimte-tijd begrip in het kleine een principieele verandering moet ondergaan; Dirac [3]) verklaart 1928 dat de verdere vooruitgang ligt in de richting van het invariant maken van de vergelijkingen bij steeds meer omvattende transformatiegroepen (dat wil dus zeggen bij andere meer algemeene meetkunden) en nog duidelijker in 1938 [4]) dat in het binnenste van het electron de elementaire eigenschappen van ruimte en tijd hun geldigheid verliezen; Flint [5]) en Yositaka Mimura [6]) komen 1935 met een eigenaardig lijnelement dat geen lengte is maar een matrix en ook Hartland en Snijder gaan 1947 in die richting; Born [7]) verlaat 1938 de metriek voor ruimte en tijd in het kleine en voert daarvoor in de plaats een metriek voor impuls-energie in, hetgeen eigenlijk neerkomt op de invoering van een oneindig dimensionale ruimte en in die richting gaan ook March [8]) en v. Dantzig [9]) met hun verzamelingsfuncties, maar daarmede ben ik dan al bij de mathematici terecht gekomen, die ik in dit verband eigenlijk niet mee wil laten spreken. Inderdaad een overstelpende hoeveelheid aanwijzingen, die alle in de richting gaan

---

[1]) Naturw. 14 (1920) 1.

[2]) Handb. der Physik XXIV 1, Quantentheorie, 2de druk 272.

[3]) Quantummechanics, 1e druk, voorrede.

[4]) Proc. Roy. Soc. 167 (1938) 160.

[5]) Proc. Roy. Soc. 150 (1935) 421—441; 159 (1937) 45—56.

[6]) Journ. of Sc. Hirosima Univ. 5 (1935).

[7]) Proc. Roy. Soc. 165 (1938) 291-303; 166 (1938) 552—557.

[8]) Die Naturwisschenschaften 26 (1938) 649—56.

[9]) Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet. 37 (1934) 521—26; 526—31; 644—52; 825—36; 39 (1936) 126—31; 785—94; Proc. Cambr. Phil. Soc. 30 (1934) 421—27. Comptes Rendus Oslo 1936 II 225—27; Erkenntniss (1938) 142—46. Inaugureele rede Delft 1938. Zie verder voor overzicht Schouten, rectoraatsrede Delft 1939.

van een verruimde metriek, erger nog een ametrische meetkunde of nog erger een verzamelingsleer of topologie in plaats van een meetkunde. Vergelijken we dit nu nog met de ontwikkeling van de theorie van het mesonveld. Spintheorie gaf eenerzijds aanleiding tot de ontwikkeling van de spin voor meer dimensies, anderzijds tot den opbouw van een conforme theorie. De conforme theorie past in het schema van de zooeven geëischte verruimde metriek. Voor de hoogere mesonvelden moet men wel verwachten dat zij de hoogere spin zullen opeischen, welnu de theorie hiervan ligt klaar en er werd uit zuiver theoretische belangstelling met élan en succes aan gewerkt (Cartan, Weyl, Brauer). Verder zullen die hoogere mesonvelden allicht niet tevreden zijn met de conforme meetkunde en een uitbreiding eischen waarvoor dan als naastliggende zeker de conforme Finslersche meetkunde het eerst in aanmerking komt. Inderdaad is nu aan de Finsler'sche meetkunde door tal van onderzoekers uit zuiver theoretisch interesse met élan en succes gewerkt en ligt er een groote hoeveelheid materiaal klaar, voor zoover mij bekend nog niet met de fine touche der conformiteit, die echter vermoedelijk gemakkelijk aan te brengen is. Gezien de vergaande eischen, die wij zooeven hebben hooren stellen is het niet aan te nemen dat deze verruimingen iets anders zijn dan overgangsstadia en dat het tenslotte via oneindig dimensionale ruimten en verzamelingsfuncties naar de topologie toegaat. Inderdaad, waar principieel niet meer gemeten kan worden, behoudt alleen nog de topologie het woord. Dat de topologie uit zuiver theoretische belangstelling met élan en succes bewerkt is en tot een zekere afsluiting is gekomen zal wel niemand ontkennen en het was mede het enthousiasme dat ik altijd bij topologen aantrof en dat ik nu weer op den laatsten topologendag in Amsterdam mee mocht beleven, dat bij mij de gedachte nog vaster vorm deed aannemen, dat er hier heftige onbewuste natuurkrachten bezig waren, die zeker iets tot stand moesten brengen dat ook in grooter verband zijn waarde zou toonen.

De topologie is een der laatste woorden van de wiskunde. Maar er is een nog later woord, het grondslagenonderzoek. Dat dat onderzoek niet op practische toepassingen gericht is, is duidelijk, en dat het met élan en met succes wordt uitgevoerd behoeft in Amsterdam zeker niet te worden bewezen. Merkwaardig is het nu, dat Reichenbach [1]) in zijn laatste boek over de philosophische grondslagen der quantenmechanica zeer duidelijk heeft gewezen

[1]) Philosophical Foundations of Quantum Mechanics. University of California Press 1946.

op de beteekenis van een driewaardige (dat is dus een niet klassieke) logica voor de quantenmechanica. Anderzijds is door Jordan [1]) uitgesproken, dat de ordening der levenlooze verschijnselen, die wij tegenwoordig quantenmechanica noemen, niets anders is als een limietgeval van een ordening, die ook de levensverschijnselen mee zou moeten omvatten. Hij zegt zeer duidelijk dat „die angemessene Auffassung die sein dürfte, dass die anorganischen Phänomene und Gesetzmässigkeiten ein *vereinfachter Grenzfall* der organischen sind." Waar nu reeds de quantenmechanica in haar huidig stadium een driewaardige logica verlangt is de onderstelling niet gewaagd, dat die toekomstige „organica" ook meerwaardige logica's zou gaan eischen en misschien zelfs wel die oneindig waardige, die door Heyting in verband gebracht is met het formeele schema der intuitionistische wiskunde. Ware dit zoo dan zou er ook aan het grondslagenonderzoek duidelijk een onbewust doelgerichte kant zijn.

Concludeerende mogen wij wel zeggen dat de hier zeer vluchtig geschetste toetsing van de mogelijkheid van finale ketens aan het voorbeeld der kernphysica werkelijk geen slecht, ja eigenlijk een verrassend gunstig resultaat heeft opgeleverd. En dat brengt ons dan direct tot de vraag wat het nut van de nieuwe causaal-finale beschouwingswijze zou kunnen zijn. Zeker *niet* dat wij mathematici de ontdekking van een onbewuste doelgerichtheid noodig zouden hebben om daaraan het goed recht onzer abstracte onderzoekingen te ontleenen. Dat goede recht hebben wij ook zonder dit alles en hier geldt nog steeds het trotsche woord van Jacobi „que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain". Maar van een algemeen standpunt is het toch kennelijk wel van het grootste belang dat alle verbanden, causaal en finaal, tusschen alle verschillende gebieden van menschelijke werkzaamheid zooveel mogelijk worden gekend en schematisch wel geordend. Ook is er nog een zekere practische kant, er mag namelijk wel eens een lans gebroken worden voor het goed recht en het groote nut van het bij elkaar over de heining kijken, en wel grondig kijken, niet alleen met behulp van popularizeeringen. Indien dit eens meer geregeld en meer systematisch dan tot nu zou kunnen gebeuren, dan zou dit het proces van wederzijdsche inductie in niet onbelangrijke mate kunnen versnellen. Daarbij denk ik natuurlijk niet aan wiskunde en physica alleen. Het besef dat er een aardige kans bestaat dat er aan de andere zijde van de heining iets bruikbaar ligt te wachten, zou hier een stimulans kunnen zijn.

---

[1]) Anschauliche Quantentheorie, Berlin 1936, 301.

DE ONGELIJKHEDEN IN DE SCHOOLMEETKUNDE

door

P. WIJDENES.

Het is met de ongelijkheden een raar geval. Tot voor kort werd er in de algebra met geen woord over gerept; sinds een 20 jaar (dat noem ik dan kort geleden) is men er wat aan gaan doen; ze zijn beslist nodig, want ze komen in voortgezette studie bijna evenveel voor als de gelijkheden. Ik vermoed echter, dat er bijna niemand is, die er in de algebrales in de 1e klas over spreekt; en toch . . ., de ongelijkheden komen in de meetkunde reeds omtrent Kerstmis; zo niet eerder! *M.i. is het hoogst gewenst de ongelijkheden een jaar ongeveer uit te stellen*; zo na de stellingen over congruentie, over bijzondere vierhoeken, over de eerste meetkundige plaatsen; dat is allemaal leerstof, die veel eenvoudiger is dan de ongelijkheden. Ongelijkheden moeten komen voor de onderlinge ligging van twee cirkels, voor de raaklijnen; vast niet eerder. Wordt er in de meetkundeles vooraf iets behandeld van de ongelijkheden? Ik betwijfel het. Is het voor kinderen, die 2 à 3 maanden wat aan letterrekenen hebben gedaan, zo vanzelf sprekend, wat in § 1 hieronder wordt behandeld? Dat moet toch zeker (ook al worden de ongelijkheden een jaar later onder handen genomen) in elk geval worden gedaan.

Het volgende in de trant van een schoolboek.

§ 1. Dat 7 kleiner is dan 9, schrijven we zo op: $7 < 9$; lees: 7 kleiner dan 9; $4 > 2$ leest men: 4 groter dan 2; (men mag ook

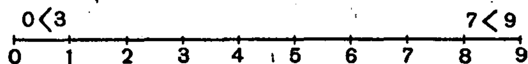


Fig. 1.

het woordje *is* er bij zeggen). Bij beide staat de punt van het teken gekeerd naar het kleinste van de twee getallen; het grootste staat in het wijdste deel; $<$ heet het kleiner-teken, $>$ het groter-teken, samen ongelijktekens.

Het is duidelijk, dat verwisseling van de leden niet anders is dan het lezen van de leden van rechts naar links, zodat $3 > 0$ hetzelfde is, als $0 < 3$ en $9 > 7$ hetzelfde als $7 < 9$. We gebruiken

bij voorkeur het $<$-teken; op de as van fig. 1 stijgen de getallen bij het voortgaan naar rechts; bij het gebruik van het kleinerteken hebben de getallen dezelfde volgorde als op de as; zie maar op fig. 1 b.v. $2 < 5 < 8$.

$a_1 < a_2 < a_3$ betekent, dat men, op de as naar rechts gaande, eerst a_1 krijgt, dan a_2 en dan a_3; zie fig. 2. Hieruit volgt:

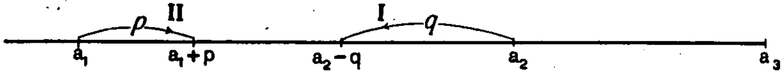


Fig. 2.

1. Als $a_1 < a_2$ is en $a_2 < a_3$, dan is $a_1 < a_3$; korter: uit $a_1 < a_2 < a_3$ volgt $a_1 < a_3$.

Gevolg: van een aaneengeschakelde ongelijkheid met gelijke tekens mag men de tussenliggende schrappen; met letters:
uit $a < a_1 = b_1 < c_1 < d$ volgt $a < d$.

Er mogen natuurlijk ook een of meer gelijktekens tussen de termen staan.

2. Een ongelijkheid is juist, als een andere geldt met vergrote kleine kant of verkleinde grote kant of met beide.
p en q pos.; het volgende bijwijzen op fig. 2.

Als $a_1 + p < a_2$ is, is $a_1 < a_1 + p < a_2$; volgens **1** is dan $a_1 < a_2$;
als $a_1 < a_2 - q$ is, is $a_1 < a_2 - q < a_2$; volgens **1** is dan $a_1 < a_2$;
als $a_1 + p < a_2 - q$ is, is $a_1 < a_1 + p < a_2 - q < a_2$; volgens **1** is dan $a_1 < a_2$.

Bij de eerste hiervan is $p < a_2 - a_1$, bij de tweede is $q < a_2 - a_1$ en bij de derde $p + q < a_2 - a_1$; zie vooral fig. 2, die de drie gevallen in één oogopslag geeft.

In getallen: uit $6\frac{3}{4} < 9$ volgt $6 < 9$;
uit $6 < 8\frac{1}{3}$ volgt $6 < 9$; uit $6\frac{3}{4} < 8\frac{1}{2}$ volgt $6 < 9$.

3. Als $a_1 < a_2$ is, is $a_1 + b < a_2 + b$, ook $a_1 - c < a_2 - c$.
Men leest dit wel: men mag beide leden van een ongelijkheid met een zelfde getal vermeerderen of verminderen.

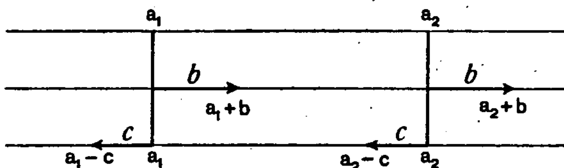


Fig. 3.

$a_1 < a_2$ betekent, dat a_1 links ligt van a_2; $a_1 + b$ en $a_2 + b$ zijn de verschoven a_1 en a_2 over de vector b; de onderlinge ligging

wordt daardoor niet veranderd; evenmin, als men beide over een vector c naar links verschuift; zie fig. 3.

4. Als $a_1 + a_2 < b_1 + b_2$ is, dan geeft aftrekking van beide leden met b_1 (zie **3**):

$a_1 + a_2 - b_1 < b_2$; $+ b_1$ uit het 2e lid geeft $- b_1$ in het 1e; vermindert men beide leden met a_2, dan komt er

$a_1 < b_1 + b_2 - a_2$; $+ a_2$ in het 1e lid geeft $- a_2$ in het 2e.

Evenals voor de gelijkheden geldt voor de ongelijkheden dus: **bij het overbrengen van een term van het ene lid naar het andere moet men zijn teken omkeren.**

Men kan een ongelijkheid herleiden tot een andere, waarvan een der leden 0 is; men heeft het kleinste lid slechts met tegengesteld teken naar het grootste over te brengen; b.v.

$5 > 2$ wordt $3 > 0$; verschuiving van 2 naar links;

$7 < 15$ wordt $0 < 8$; verschuiving van 7 naar links.

5. Uit $a_1 < b_1$ en $a_2 < b_2$ volgt $a_1 + a_2 < b_1 + b_2$.

Dit is zo ineens duidelijk: de twee kleinste zijn samen kleiner dan de twee grootste. We kunnen het ook bewijzen, dat is: laten steunen op de reeds aanwezige kennis.

Uit $a_1 < b_1$ volgt $a_1 + a_2 < b_1 + a_2$ (zie **3**);

uit $a_2 < b_2$ volgt $b_1 + a_2 < b_1 + b_2$; (zie **3**);

volgens **1** is nu $a_1 + a_2 < b_1 + b_2$.

6. Uit $a_1 < a_2$ volgt $p - a_1 > p - a_2$.

$$+\left\{\begin{array}{l} a_1 < a_2 \\ p - a_1 - a_2 = p - a_1 - a_2 \end{array}\right.$$

$$\overline{p \quad - a_2 < p - a_1}$$

volgens **3**; van rechts naar links gelezen, is dit het gestelde.

Dit komt b.v. voor bij: is $\alpha < \beta$, dan is het complement van α groter dan het complement van β.

We gaan nu over tot behandeling van de meetkundige stellingen.

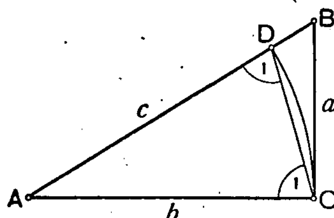
§ 2. Al lang geleden hebben we geleerd: als van $\triangle$ ABC $b = c$ is, is $\beta = \gamma$; en omgekeerd; in vraagstukken dikwijls toegepast. Een vraag, die zich daarop voordoet, luidt: en als $b > c$ is, wat dan?

Is er ook een omgekeerde? We zullen dit nagaan; als inleiding bewijzen we een paar stellingen, waarin sprake is van ongelijkheden.

Stelling 1a. Van een rechthoekige driehoek is de schuine zijde de grootste zijde.

b. Van een stomphoekige driehoek is de zijde over de stompe hoek de grootste zijde.

Gegeven:
$\angle C = 90°$ of
$\angle C > 90°$.



Te bewijzen:
$c > b$.

Fig. 4.

Bewijs. Maak $AD = AC$, dan is $\angle D_1 = \angle C_1$, dus is $\angle C_1$ scherp; $\angle C$ is recht of stomp; dus ligt CD binnen de driehoek, dus D tussen A en B; dat is $b = AC = AD < AB = c$; volgens **1** van § 1 is dus $b < c$.

De lengte van de loodlijn uit een punt P op een lijn l heet de **afstand** van P tot l; P′ is het voetpunt van de loodlijn; P′ noemt men de **projectie** van P op l; als A een punt is van l, dan heet **P′A de projectie van PA op** l.

Stelling 2. Twee lijnstukken PA en PB en hun projecties P′A en P′B op een rechte l **hebben dezelfde volgorde van grootte**[1].

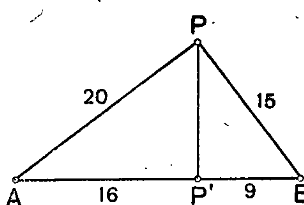


Fig. 5*a*.

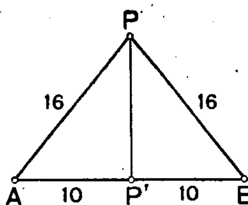


Fig. 5*b*.

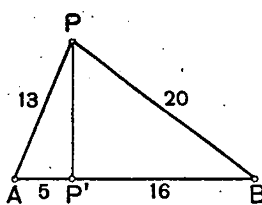


Fig. 5*c*.

Een paar getallen als toelichting (de eenheid is $1\frac{1}{2}$ mm).

$20 > 15$ en	$16 = 16$ en	$13 < 20$ en
$16 > 9$	$10 = 10$	$5 < 16$

Het teken $>$, ook $=$, ook $<$, geldt tegelijk voor de schuine lijnstukken en voor hun projecties; dat is het, wat de stelling zegt.

De stelling bestaat uit tweemaal twee delen, nl.:
uit $P'A = P'B$ volgt $PA = PB$ en omgekeerd;
uit $P'A < P'B$ volgt $PA < PB$ en omgekeerd.

[1]) Stelling 2 is de korte samenvatting van: Twee lijnstukken uit P naar punten, die op een lijn l even ver van het voetpunt van de loodlijn uit P verwijderd zijn, zijn even lang; en omgekeerd. Hoe verder het punt op l van het voetpunt der loodlijn uit P verwijderd is, hoe langer het verbindingslijnstuk met P is; en omgekeerd.

De eerste twee hebben we al gehad; voor het derde en vierde gedeelte leggen we PA en PB aan dezelfde kant van PP′; voor het geval, dat ze aan verschillende kanten liggen, spiegele men PA in PP′.

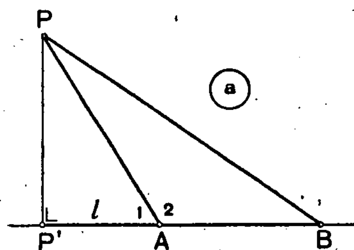


Fig. 6*a*.

Gegeven: PP′ $\perp l$; P′A < P′B.
Te bewijzen: PA < PB.
Bewijs. $\angle A_1$ is scherp; $\angle A_2$ dus stomp; dan is PB de grootste zijde van $\triangle$ PAB (st. 1*b*); dus PA < PB.

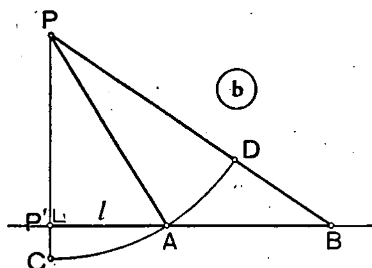


Fig. 6*b*.

Gegeven: PP′ $\perp l$; PA < PB.
Te bewijzen: P′A < P′B.
Bewijs. PP′<PA volgens st. 1*a*; PA < PB volgens het gegeven. Trek de cirkel met P als middelpunt en PA als straal. P′ ligt binnen de cirkel en B er buiten; P′B snijdt de cirkel in A, dus ligt A tussen P′ en B; dat is: P′A < P′B.

Stelling 3. De som van twee zijden van een driehoek is groter dan de derde zijde; het verschil is kleiner dan de derde zijde. [1])

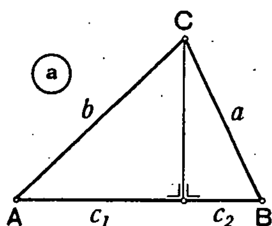


Fig. 7*a* [1]).

$a > c_2$ St. 1*a*; nr. 5
$b > c_1$ van § 1.
$a + b > c$

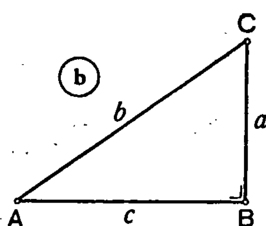


Fig. 7*b*.

$b > c$; St. 1*a*; nr. 5
dus $a + b > c$; van § 1.

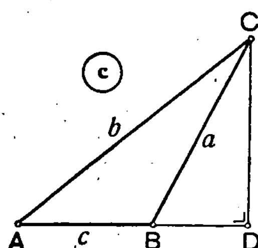


Fig. 7*c*.

$b >$ AD $>$ AB $= c$, dus $b > c$ (nr. 1) en $a+b > c$ (nr. 5).

---

[1]) Het bewijs steunt op st. 1; men kan volstaan met het bewijs onder fig. 7*a*; ter oefening in de ongelijkheden zijn fig. 7*b* en 7*c* met de bewijzen er ook bij gezet.
Men kan natuurlijk ook het gewone bewijs geven; wat ik hier geef is m.i. wel zo eenvoudig.

Moeten we bewijzen, dat $a + b > c$ is, dan trekken we de hoogtelijn uit C; het voetpunt daarop kan op AB vallen, in A of in B, of op een verlengde van AB; zie fig. 7*a*, *b* en *c*.

Voor elke driehoek gelden: 1) $a + b > c$; 2) $b + c > a$; 3) $c + a > b$. We brengen een term uit het eerste lid over naar het tweede lid en krijgen dan:

uit 1) $a > c - b$; uit 1) $b > c - a$; uit 2) $c > a - b$
uit 3) $a > b - c$; uit 2) $b > a - c$; uit 3) $c > b - a$.

We onderstellen $a < b < c$; dan zijn $a - b$, $a - c$ en $b - c$ negatief; de volstrekte waarden worden aangegeven door deze verschillen te voorzien van het modulusteken; zo: $|a - b|$, $|a - c|$ en $|b - c|$; deze zijn dus $b - a$, $c - a$ en $c - b$. Zet men dus $a > |b - c|$, dan is dit waar, ook voor $b < c$; een onderstelling van de onderlinge grootte van a, b en c is dan onnodig.

We vinden, **dat een zijde inligt tussen de som en het verschil van de beide andere zijden;** in letters:

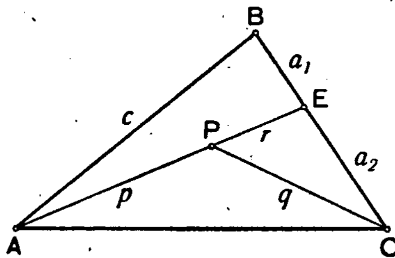
$$b + c > a > |b - c|;\quad a + c > b > |a - c| \text{ en } a + b > c > |a - b|.$$

Gevolg van stelling 3.

Als men een punt binnen een driehoek verbindt met de uiteinden van een zijde, is de som van de verbindingsstukken kleiner dan de som van de beide andere zijden.

Gegeven:

P ligt binnen $\triangle$ ABC.



Te bewijzen:

$p + q < c + a$.

Fig. 8.

Bewijs. Verleng AP tot het punt E op BC:

$$\left.\begin{array}{l} \text{in } \triangle \text{ ABE is } p + r < c + a_1 \\ \text{in } \triangle \text{ PEC is } \quad q < r + a_2 \end{array}\right\} \text{st. 3, twee keer.}$$

$$\underline{\hspace{6em}} +$$

$$p + q + r < c + a + r \quad \text{nr. } \mathbf{5} \text{ van § 1}$$

$$p + q < c + a \quad \text{nr. } \mathbf{3}$$

Stelling 4. De zijden van een driehoek en hun overstaande hoeken hebben dezelfde volgorde van grootte [1]).

Het is voldoende dit te bewijzen voor twee zijden en hun overstaande hoeken.

De stelling bestaat uit de volgende delen:

1) uit $a = b$ volgt $\alpha = \beta$ en omgekeerd; deze zijn reeds behandeld;

2) uit $a < b$ volgt $\alpha < \beta$ en omgekeerd; deze twee hebben we alleen te bewijzen.

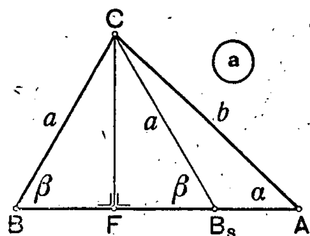


Fig. 9*a*.

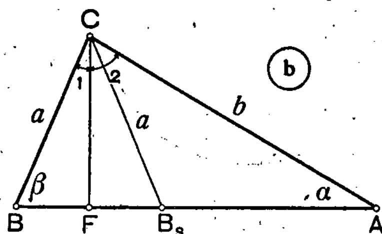


Fig. 9*b*.

Gegeven: $a < b$.
Te bewijzen: $\alpha < \beta$.

Bewijs. Uit $a < b$ volgt FB < FA (st. 2); spiegel CB in CF, dan valt B_s dus tussen F en A. Nu is β buitenhoek van $\triangle ACB_s$, dus $\alpha < \beta$.

Liggen B en A reeds aan dezelfde kant van F, dan is $\angle B$ stomp; dus zeker groter dan α.

Gegeven: $\alpha < \beta$.
Te bewijzen: $a < b$.

Bewijs. Als β stomp is, is b de grootste zijde (st. 1*b*); dus $a < b$.

$\alpha < \beta$ geeft $\angle C_2 > \angle C_1$ (zie 6); spiegel nu CB in CF, dan valt CB_s tussen CF en CA. In $\triangle ACB_s$ ligt b over een stompe hoek en a over een scherpe; dus is $a < b$.

§ 3. *Toepassingen van st.* 3.

Zie op fig. 10*a* het punt P buiten de cirkel, op 10*b* het punt P binnen de cirkel. Men verbindt P met punten van de cirkel; zie

[1]) Ook dit is een samenvatting van de bekende stellingen over ongelijke zijden en hun overstaande hoeken; en omgekeerd. Inbegrepen is ook nog, dat in een gelijkbenige driehoek twee hoeken gelijk zijn en omgekeerd.

Er wordt geen bewijs uit het ongerijmde gegeven; de leerlingen hebben altijd en terecht het gevoel, dat zo'n bewijs een slinkse manier is om iets aan te tonen. Niet, dat we hun het bestaan er van moeten onthouden, maar zo spaarzaam mogelijk gebruiken, dat is toch wel het beste m.i.

Let vooral op, dat de st. 2, 3 en 4 op st. 1 steunen; op de voorgestelde manier vormen de st. 1—4 een homogeen stelsel van beweringen.

PA, PB, PC en PD. We onderzoeken nu, welk er van het langste verbindingslijnstuk is, welk het kortste. Even proberen met de passer geeft spoedig: PA het langste, PB het kortste. Dit zullen we nu bewijzen; let op, dat MA, MB, MC en MD allemaal stralen r zijn.

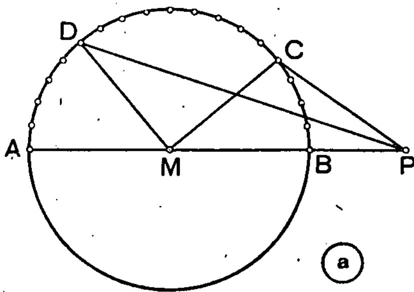


Fig. 10*a*.

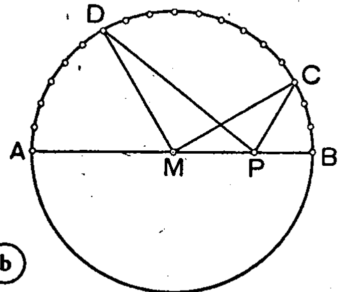


Fig. 10*b*.

Ligt M op het lijnstuk PA, dan is PA = PM + r > PD; zie △ PMD; dus is PA het langste; op beide figuren te volgen.

Op fig. 10*a* is PB = PM — r < PC; zie △ PMC;

op fig. 10*b* is PB = r — MP < PC; dus is PB het kortste lijnstuk, dat een punt P verbindt met punten van de cirkel. De gevallen, dat P op de cirkel ligt of dat P met M samenvalt, kunnen we laten rusten. We hebben geleerd:

Stelling 5. P is een punt in het vlak van de cirkel, wáarvan M het middelpunt is; het langste, zowel als het kortste lijnstuk, dat P met punten van de cirkel verbindt, liggen op de lijn PM; het langste gaat door M, het kortste heeft M op een verlengde.

Verbindt men P met punten B, C, ... op dezelfde halve cirkel (enige zonder letters; zie de oreillons op fig. 10*a* en *b*) en ten slotte met A, *dan groeien de verbindingsstukken aan van het minimum PB tot het maximum PA*. Het bewijs verloopt zo: verbind P met twee

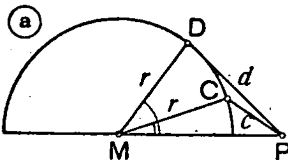


Fig. 11*a*.

$c + r < d + r$ (gev. St. 3), dus $c < d$ (nr. 3).

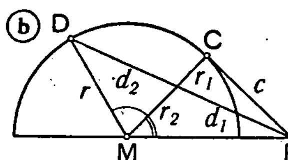


Fig. 11*b*.

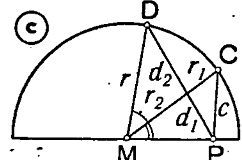


Fig. 11*c*.

Voor beide geldt:

$$\left.\begin{array}{l} c < r_1 + d_1 \\ r < r_2 + d_2 \end{array}\right\}$$ opgeteld $c < d$; hierbij is r aan weerszijden weggevallen (nr. 3).

punten C en D van dezelfde halve cirkel; neem $\angle$ PMC $<$ $\angle$ PMD Nu kan C binnen $\triangle$ PMD liggen (fig. 11*a*), maar ook er buiten; in het laatste geval snijdt PD de straal MC; r wordt verdeeld in r_1 en r_2, PD $= d$ in d_1 en d_2; PC $= c$; zie fig. 11*b* en fig. 11*c*.

Op elk van de figuren 11*a*, *b* en *c* ziet men twee driehoeken MPC en MPD; deze hebben MP gemeen en MC $=$ MD; $\angle$ CMP $<$ $\angle$DMP en daaruit leiden we af PC $<$ PD: bij een kleinere ingesloten hoek met M als hoekpunt behoort een kleiner verbindingsstuk. Ook het omgekeerde geldt; dit bewijzen we als volgt: het gegeven is nu $c < d$, het gestelde $\angle$ PMC $<$ PMD.

$\angle$ PMC $=$ $\angle$ PMD gaat zeker niet; dan zou immers $\triangle$ PMC $\cong$ $\triangle$ PMD zijn (zhz);

$\angle$ PMC $>$ $\angle$ PMD is evenmin waar, want daaruit zou volgen $c > d$ (zie de fig. 11). We hebben nu geleerd:

1e *Gevolg.* **Als twee driehoeken twee zijden gelijk hebben, is de volgorde van grootte van de derde zijden en de ingesloten hoeken dezelfde.**

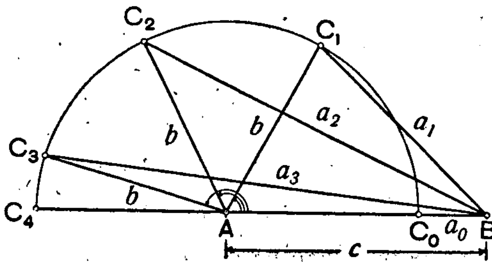


Fig. 12.

Van $\triangle$ ABC (fig. 12) hebben c en b een bepaalde lengte; we zetten $c =$ AB uit; de halve cirkel met A als middelpunt en b als straal geeft de plaats aan van het derde hoekpunt C; (uiteraard hebben we genoeg aan de halve cirkel van fig. 12; de andere helft is er symmetrisch mee t.o. van de zijlijn AB).

C_0 en C_4 zijn de eindpunten van de meetkundige plaats van C; zij behoren er niet toe.

Neemt C achtereenvolgens de standen C_0, C_1, C_2, C_3, C_4 in, dan groeit de ingesloten hoek α aan van 0° tot 180° (zie de hoeken aangegeven door de pijltjes)

$$0° = \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4 = 180°;$$

volgens hetgeen hierboven bewezen is, is

het minimum $BC_0 = a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 = BC_4 =$ het maximum.

Hier staat, wat in de stelling wordt uitgedrukt met de woorden: dezelfde volgorde van grootte: is $\alpha_2 < \alpha_3$, dan is $a_2 < a_3$ en omgekeerd.

Het gevolg van st. 5 wordt niet veel toegepast; de afleiding is echter de moeite waard. Een belangrijke toepassing mogen we niet

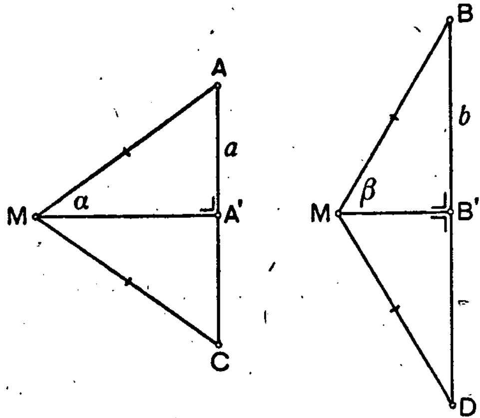


Fig. 13.

onvermeld laten; zie fig. 13 met twee rechthoekige driehoeken. MAA' en MBB'; MA = MB. Beide driehoeken hebben we gespiegeld in een rechthoekszijde.

Uit $\beta > \alpha$, dus $2\beta > 2\alpha$, volgt, dat $2b > 2a$ is, dus $b > a$; in woorden:

2e Gevolg. *Als twee rechthoekige driehoeken gelijke schuine zijden hebben, hebben twee scherpe hoeken dezelfde volgorde van grootte als hun overstaande zijden.*

---

§ 2 heeft het over de afstand van een punt P tot een lijn l met de gevolgen daarvan, uitgedrukt in de stellingen 2, 3 en 4. Is het niet een goed ding, als men daarbij ook maar neemt de andere figuur uit de schoolmeetkunde, de cirkel, en dus ook eens te zien naar de afstand van een punt tot een cirkel. Zie stelling 5 en het eenvoudige bewijs, dat PA de maximale, PB de minimale lengte is van P tot punten van de cirkel.

Het 1e gevolg van st. 5 is de samenvatting van:

Als twee driehoeken twee zijden gelijk hebben, maar de ingesloten hoek in de ene driehoek is groter dan in de andere, dan heeft de driehoek met de grootste ingesloten hoek ook de grootste derde zijde.

Als twee driehoeken twee zijden gelijk hebben, maar de derde zijde van de ene driehoek is groter dan die van de andere driehoek, dan heeft de driehoek met de grootste derde zijde ook de grootste overstaande hoek.

In alle mij bekende boeken komt het 1e gevolg van st. 5 een heel eind verder dan de st. 1, 2, 3 en 4. Ik stel het voor te doen, zoals het hier staat in § 3. Kijk, men spreekt over twee zijden, die gelijk blijven en ongelijke ingesloten hoeken. Wat is nu natuurlijker, dan te zeggen (zie fig. 12): AB ligt vast; AC heeft een

gegeven lengte; wel, dan ligt C op de cirkel (A, b); men komt er dan van zelf toe, B te verbinden met punten van de cirkel; BC_0 is het minimum, BC_4 het maximum; er is gestadige aangroeiing van BC_0 over BC_1, BC_2, BC_3 tot BC_4; a wordt groter, gevolg: a wordt groter en omgekeerd.

De samenvatting in een korte en duidelijke zin als in gevolg 1 heeft het voordeel, dat er wat beweging in de meetkunde komt. Dat is zo broodnodig ter vervanging van onze versteende schoolmeetkunde. Zonder het woord te noemen wordt a voorgesteld als functie van α; later zien ze: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ en dan herhaalt men het; dan hebben ze het functiebegrip in de algebrales gehad en wordt de stelling van fig. 12 uit de meetkunde opgediept.

Het 2e gevolg is eigenlijk: voor $\alpha < 90°$ groeit $\sin \alpha$ aan met α; $\cos \alpha$ neemt af, als α toeneemt; op dit 2e gevolg kunnen we terugwijzen, als we met de goniometrie beginnen. Een beetje wisselwerking tussen de onderdelen van de schoolwiskunde is m.i. niet anders dan toe te juichen.

PLAATS EN BETEKENIS VAN HET ONDERWIJS IN DE BESCHRIJVENDE MEETKUNDE OP DE H.B.S. [1])

door

Dr. JOH. H. WANSINK.

§ 1. Ik sta hier om het goed recht te verdedigen van de B.M. in ons meetkunde-onderwijs. Ik heb gemeend over mijn aanvankelijke bezwaren tot het houden van deze inleiding te moeten heenstappen, omdat ik het tenslotte onverantwoord vond in dit milieu van enthousiaste didactici de gelegenheid te laten voorbijgaan tot een ernstige waarschuwing voor een streven, dat mij voor ons onderwijs funest lijkt.

In Doorn heeft Prof. Freudenthal volgens het verslag in het jongste nummer van Euclides (XXIV, blz. 121) beweerd:

„De B.M. is een waardeloos vak, dat niet thuis hoort op een M.S. Delft is slechts een der zeer weinige hogescholen, waar de beschrijvende meetkunde nog wordt onderwezen".

Dr. Beth schreef in 1934 (Euclides X, blz. 265):

„. . . (ik kan mij) nauwelijks een wijziging in ons leerplan denken, die ik meer zou betreuren dan een afvoering van de beschrijvende meetkunde".

En op de vragen van onze secretaris heeft hij volgens de laatste circulaire o.a. geantwoord met deze zin:

„Naar mijn mening handelt iemand, die ruimtemeetkunde onderwijst zonder B.M. (welke methode dan ook) nodig te hebben, als iemand, die in de eerste klasse H.B.S. planimetrie-onderwijs zou geven zonder figuren te tekenen".

In de praktijk van mijn onderwijs tracht ik de volgende stelregel te huldigen:

achter het antwoord van een leerling, hoe dwaas of onlogisch het op het eerste gezicht of bij het eerste aanhoren ook moge schijnen, blijkt bij rustig doorpraten meestal eén goede bedoeling te zitten.

Hoe moet ik — mutatis mutandis — met dit principe aan, nu twee geleerden van naam uitspraken doen, die zo diametraal

---

[1]) Inleiding tot een gedachtenwisseling op de bijeenkomst van de wiskundewerkgroep van de W.V.O. te Utrecht op 5 Maart 1949.

tegenover elkaar staan? We hopen, dat de discussies van vanmiddag ertoe zullen bijdragen het indicatieve element in de waarderingsoordelen bloot te leggen, dat er iets onthuld zal worden van de positieve intenties, die er achter de negatieve leuze: „weg met de B.M." verscholen liggen, dat het begrijpelijk zal worden, hoe ieder tot een, zo van het oordeel van de andere afwijkend, oordeel kon komen.

In de eerste plaats vermoed ik, dat in de beide door mij geciteerde uitspraken met B.M. niet hetzelfde wordt bedoeld.

Mag ik de volgende hypothese wagen:

voor Prof. Fr. is de B.M. de methode der orthogonale parallelprojectie op twee onderling loodrechte projectievlakken, die hij voor het M.O. waardeloos acht — zodra daar het constructief element op andere wijze voldoende tot zijn recht is gekomen; voor Dr. B. is B.M. identiek met constructieve meetkunde: het daadwerkelijk uitvoeren met passer en liniaal van wat in de Stereometrie in zinnen wordt omschreven.

Omdat het constructieve element in de meetkunde wel de spil zal blijken, waaromheen onze discussies vanmiddag draaien, moge ik aan mijn eigenlijke inleiding een beschouwing over dit constructieve element laten vooraf gaan.

Daarna bespreek ik:

a. de plaats van de B.M. in ons schoolprogram;
b. de betekenis van het onderwijs in de B.M.;
c. de gevolgen van het wegvallen van de B.M. als afzonderlijk leervak.

§ 2. Van wat voor aard is de geestelijke arbeid, die onze leerlingen bij het onderwijs in meetkunde te verrichten hebben? Ik onderscheid drieërlei:

a) In het ontdekken van, ev. in het reproduceren van de samenhang in een deductief systeem van meetkundige eigenschappen; de leerling heeft bewijzen te reproduceren, te modificeren, te ontdekken; hij krijgt gelegenheid in een bepaalde samenhang zelf eigenschappen te vinden.

b) In het berekenen van de maatgetallen van lijnstukken, hoeken, oppervlakken, inhouden.

c) In het maken van meetkundige tekeningen.

Ten aanzien van deze laatste is het van belang onderscheid te maken tussen:

a) schetstekeningen ter ondersteuning van een wiskundig betoog;

b) precisietekeningen, vervaardigd met het Euclidisch tekenmateriaal: passer en liniaal.

Op deze laatste soort van tekeningen hebben we doorgaans het oog, als we het over constructies hebben.

Naast deze tweedeling staat een andere, die voor ons onderwijs van belang is:

a) tekeningen van tweedimensionale figuren;

b) tekeningen van driedimensionale figuren.

Ik geloof niet, dat er ernstige voorstanders zijn van een meetkunde-onderwijs, waarbij de tekeningen van tweedimensionale figuren verwaarloosd zouden mogen worden. Deze tekeningen zijn de eerste drie schooljaren bij het planimetrieonderwijs telkens weer aan de orde. De moeilijkheden op constructief gebied zijn dan nog gering vergeleken bij later: ze vloeien voornamelijk voort uit de onvolkomenheid van het constructiemateriaal.

Zo hebben twee mathematische lijnen slechts één punt gemeen; maar twee getekende lijnen, ook in het gunstigste geval een „ruitachtige" figuur.

We weten allen, dat het moeilijk is de leerlingen een zekere vaardigheid in het tekenen bij te brengen, hun nauwgezetheid en accuratesse te ontwikkelen.

Laat maar eens een cirkel construeren door de middens van de zijden van een driehoek en controleer, of het wel de negenpuntscirkel is; of: laat de drie aangeschreven cirkels en de ingeschreven cirkel van een driehoek tekenen, en onderzoek, of alle rakingen ideaal zijn. Of laat de klasse een regelmatige vijfhoek met een zijde van 5 cm construeren en uitknippen en onderzoek, of alle figuren congruent zijn!

Van een andere orde worden de moeilijkheden in klasse 4 bij de Stereometrie. In het begin is er van construeren nog weinig sprake, maar spelen de illustraties ter ondersteuning van het wiskundig betoog de hoofdrol. De moeilijkheid is dan de tweedimensionale figuur als een afbeelding van een driedimensionale te leren interpreteren.

Ik geloof, dat in dit begin van kl. 4 een vaste methode voor het tekenen dezer afbeeldingen meestal ontbreekt, althans zelden stelselachtig wordt doorgevoerd. Wel staat er sinds 1937 op het program: „Stereometrisch tekenen", maar een communis opinio over de inhoud van dit begrip is er niet. Bovendien, om behoorlijke tekeningen te kunnen maken moet er reeds enig stereometrisch inzicht aanwezig zijn, en voor het ontstaan van dit inzicht is juist het gebruik maken van tekeningen gewenst.

Het gevolg is, als zo dikwijls in opvoeding en onderwijs, een permament compromis.

Persoonlijk behelp ik me in de aanvang vaak met een scheve projectie, die officieel als cavalière-perspectief te boek staat, b.v. met de „kengetallen" 30° en ½ resp. voor wijkhoek en verkortingsfactor, maar ik kan U geen schoolboek noemen, waarin deze methode didactisch en methodisch op bevredigende wijze wordt doorgevoerd.

Los van de vraag, of op den duur de scheve projectie boven de orthogonale op twee onderling loodrechte vlakken te prefereren is, kunnen we constateren, dat een geheel verantwoorde scheve projectie voor het aanvangsonderwijs steeds te laat komt.

Het constructief element in de Meetkunde van de Ruimte komt verder aan de orde bij de netwerken en doorsneden; in de eindexamenopgaven Gymnasium spelen ze een grotere rol dan in die voor de H.B.S.

Bij netwerken kan m.i. het precisiewerk behoorlijk tot zijn recht komen, bij doorsneden maar ten dele, omdat deze plegen te worden aangebracht in figuren, die volgens een niet exact omschreven projectiemethode worden gegeven, of door de leerlingen volgens zo'n methode mogen worden getekend.

De vraag is, of door het tot dusver genoemde het constructief element in de meetkunde van de ruimte reeds voldoende tot zijn recht komt. Naar mijn mening niet.

Ik zou het betreuren, als we met de doorvoering van het construeren niet verder gingen dan deze doorsneden en netwerken benevens opgaven in de trant van:

„Gegeven zijn vier elkaar kruisende rechten *a*, *b*, *c*, *d* en een bol M.

Construeer een rechte, die *a*, *b*, *c*, onder gelijke hoeken kruist, de bol raakt en de rechte *d* snijdt." (Eindexamen Gymnasium, 1941).

Ik heb nl. de indruk, dat bij de oplossing van dit soort opgaven steeds met een omschrijving der constructie genoegen genomen mag worden, en dat nimmer tot een daadwerkelijke constructie behoeft te worden overgegaan.

§ 3. Deze daadwerkelijke constructie komt wel tot zijn recht in het vak B.M., dat op de H.B.S. wordt onderwezen. Daardoor heeft deze school meer gelegenheid het constructief element in het meetkundig onderwijs systematisch door te voeren dan het Gymnasium.

Dat de methode die bij het onderwijs in de B.M. wordt toege-

past zolang de H.B.S. bestaat, die der orthogonale parallelprojectie op twee onderling loodrechte vlakken is geweest, is een te constateren feit, dat ik wil noemen, maar dat m.i. niet essentiëel is voor de betekenis van de B.M.

Mocht een onderzoek uitwijzen, dat de scheve projectie om didactische redenen of om utiliteitsoverwegingen de voorkeur verdient boven deze orthogonale projectie, dan ben ik voor deze andere projectiemethode onmiddellijk te vinden. Onderwijzers met een veel geringere wiskundige ondergrond dan onze leerlingen bestuderen zelfs de wiskundige grondslagen der perspectief; voor onze scholen behoeft dus met de gangbare methode stellig niet het laatste woord gesproken te zijn.

Ik verdedig daarom ook niet: *de* orthogonale projectie, maar wel: *een* projectiemethode, waarbij exact geconstrueerd moet worden.

Het valt overigens op dat de orthogonale projectie niet in enig program officiëel is voorgeschreven. Beth-Dijksterhuis hebben dit in hun rapport wel geprobeerd, daarmee consoliderend, wat usance was. Van ernstige pogingen om een andere projectiemethode ingevoerd te krijgen, is me niets bekend.

Een belangrijk verschil met het illustratieve tekenen is nog, dat we in de B.M. twee projectievlakken gebruiken. Door één projectie is de te projecteren figuur niet ondubbelzinnig bepaald, door twee wel.

In het leerplan van voor 1937 vinden we t.a.v. de leerstof voorgeschreven:

voor klasse 4: inleiding der beschrijvende meetkunde;

voor klasse 5: tot aan de bol; herhaling.

In het leerplan 1937 staat:

voor klasse 4: . . .

Stereometrisch tekenen; ruimteconstructies; doorsneden en netwerken.

Inleiding der beschrijvende meetkunde.

voor klasse 5: . . .

Beschrijvende meetkunde. Doorsnijding met platte vlakken van door platte vlakken begrensde lichamen.

Kegel, cylinder en bol in eenvoudige ligging.

Het examenprogram van voor 1937 zegt:

„Bij de beschrijvende meetkunde wordt enige vaardigheid bij het uitvoeren van de voornaamste werkstukken verlangd. Toepassingen betreffende onderwerpen, waarop de bovengenoemde

steunen, of die daarmee in onmiddellijk verband staan, zijn niet uitgesloten".

Dit program is thans (1949) nog niet gewijzigd.

U ziet, hoe vaag al deze omschrijvingen en aanwijzingen zijn.

We moeten naar de leerboeken en vooral naar de eindexamenopgaven zien, om een beeld te krijgen van wat er bij het B.M.-onderwijs van de leerlingen wordt gevorderd.

Hoeveel tijd wordt er op de H.B.S. aan de B.M. besteed?

De leraar is vrij de voor de wiskunde uitgetrokken uren naar eigen welgevallen te verdelen. Ik moet dus hier allereerst voor mezelf spreken.

Ik begin met B.M. in klasse 4 ongeveer in Februari: 1 uur per week; in klasse 5 besteed ik het gehele jaar door 1 uur per week; een deel van het jaar nog een uur extra.

Totaal kom ik tot 65 van de 210 meetkunde-uren voor B.M.: d.i. ongeveer 30 % van de voor meetkunde uitgetrokken tijd, of bijna 20 % van de totale tijd.

Als Dr Bunt in *Doorn* de vraag stelt, in hoeverre elk der vakken die als onderdeel van de wiskunde worden gedoceerd, rechtmatig zijn plaats in de lesrooster inneemt, en dan verklaart bij deze vraag te denken aan de vele tijd, die op de hogere burgerschool wordt besteed aan het vak beschrijvende meetkunde, dan moet ik verklaren, dat de door mij gegeven calculatie voor mij niets verontrustends inhoudt.

§ 4. Dit oordeel van me hangt samen met de betekenis, die ik aan de B.M. toeken. Wat tracht men met het onderwijs in dit vak te bereiken en hoe?

Als ik zeg, dat er een tekenmethode wordt geleerd, die bij het technisch onderwijs algemeen toepassing vindt, die ook in de bouwkunde wordt gebruikt, noem ik een argument dat men voor onze scholen voor algemeen vormend onderwijs maar van geringe betekenis kan achten.

Hoewel het een niet geheel te verwaarlozen factor is, dat een deel onzer oud-leerlingen als tekenaar op werven, op grote bedrijven, op architectenbureaux een emplooi vindt, waarbij ze dat wat ze op de lessen in B.M. leerden, als practische kennis leren waarderen.

Belangrijker is het argument dat ik in mijn inleiding telkens weer naar voren zal brengen: de B.M. maakt de behoorlijke verzorging van het constructieve element in de meetkunde mogelijk. B.M. is te identificeren met constructieve meetkunde. Dit impliceert

dat ook het gymnasium slechts in schijn het zonder B.M. kan stellen; alleen zijn daar de didactische moeilijkheden groter dan op de H.B.S. door onvolkomenheden van het program.

Eerst in de B.M. krijgt het begrip „bepaald zijn door" dat in het Stereometrie-onderwijs zo'n grote rol speelt, voor vele leerlingen een tastbare inhoud.

Voorbeelden. 1. Een vlak is bepaald door een lijn en een punt buiten die lijn. In de Stereometrie leren de leerlingen dat zich door de lijn en het punt maar één vlak laat denken. In de B.M. ervaren ze, dat er van alle vlakken die ze zouden kunnen tekenen maar een is, dat voldoet.

2. Construeer door een punt P de transversaal van twee kruisende rechten a en b. Ik apprecieer het zeer, als een leerling de oplossing

$$x = \{(P, a), \ (P, b)\}$$

weet te geven, maar ook voor hen, die deze bondige notatie niet tot hun beschikking hebben, kan de constructieve voortbrenging van de transversaal instructief zijn en hen nader tot het begrip van de gegeven notatie brengen.

3. Eerst door een met passer en liniaal uitgevoerde constructie ontstaat voor velen een volledig beeld der constructie.

De grondconstructie der redenerende meetkunde:

„het bepalen van de snijlijn van twee gegeven snijdende vlakken" komt zonder B.M. niet tot zijn recht.

Voor vele leerlingen met een zwak voorstellingsvermogen is de B.M. een belangrijke steun, doordat er bij het uitvoeren der constructies aan hun voorstellingsvermogen geen te hoge eisen worden gesteld.

De praktijk komt hierop neer: er wordt grote aandacht besteed aan het bijzondere, aan het eenvoudige geval, dat geheel begrepen dient te zijn, dat de leerlingen zich onder ev. gebruikmaking van modellen en tekeningen volledig moeten kunnen voorstellen. Dan komen de moeilijker standen, de meer gecompliceerde gevallen; deze worden nu volgens de „methode der formele analogie" behandeld. Naar behoefte kan ook aan deze gevallen het ruimtelijk voorstellen en denken worden beoefend.

Men hoorde vaak en men hoort nog wel als argument voor de B.M. noemen: de vormende waarde van het vak en dan i.h.b. de ontwikkeling van het voorstellingsvermogen. Ook Prof. Boomstra noemt dit argument blijkens de circulaire van onze secretaris:

„Ook zou het te betreuren zijn, wanneer de T. H. ingenieurs

zou afleveren, die met het vak Beschrijvende Meetkunde in het geheel geen kennis zouden hebben gemaakt, terwijl dit vak toch een onmiskenbaar vormende waarde voor het voorstellingsvermogen heeft".

Ik sta wat huiverig tegenover dit argument.

Zonder op de vormende waarde van goed gegeven onderwijs te willen afdingen, ben ik nl. van mening, dat het niet verantwoord is een stuk leerstof van welk vak dan ook uitsluitend om die vormende waarde op het schoolprogram te zetten. De argumenten, die voor de vormende waarde pleiten, zijn meestal ongeschikt om tegenstanders te overtuigen. Heeft misschien een stuk leerstof met meer materiele waarde nl. die vormende waarde ook niet?

En wat het voorstellingsvermogen betreft, ik heb de indruk, dat het begrip hiervan veelal te vaag is om grondslag te kunnen zijn van een vruchtbare discussie.

Misschien over enige jaren als het Paedagogisch-psychologisch Centrum een langere staat van dienst heeft.

Een meer bruikbare grondslag voor discussie lijkt me de stelling, dat het door het meetkunde-onderwijs mogelijk is de voorstellingstechniek, de denktechniek, te verbeteren.

Ik wil deze stelling voor de B.M. wel voor mijn rekening nemen. Bij de door mij terzijgeschoven redactie wordt dunkt me gesuggereerd, dat men tengevolge van meetkundeonderwijs steeds beter in staat zal blijken, spontaan, zonder waarnemingen, uit eigen kracht, beelden van drie-dimensionale figuren in zijn bewustzijn op te roepen, die de suggestie geven van een bevredigende overeenstemming met die drie-dimensionale figuren. Deze visuele beelden worden als plastische beelden gekenmerkt, men ziet er diepte in, bij eidetici valt er een gelijksoortigheid van waarnemingsbeeld met voorstellingsbeeld te constateren.

Ook echter als het visuele beeld dat men krachtens eigen wilsakt in zijn bewustzijn kan doen ontstaan in aantal dimensies, in plasticiteit, in betrouwbaarheid te wensen overlaat, kan dunkt me het onderwijs ertoe bijdragen, dat men met onvolkomen beelden werkend toch in staat geraakt tot betrouwbare conclusies over de figuur in kwestie, door een verstandige interpretatie van die beelden.

Zo'n verantwoorde interpretatie stelt ons in staat uit tweedimensionale afbeeldingen van vier-dimensionale figuren juiste conclusies te trekken. Ik twijfel er dan ook niet aan, of bij de zoveel eenvoudiger sprong van 3 op 2 kan een behoorlijke denktechniek tot ontwikkeling worden gebracht, waarin spontane voorstelling,

geheugen, fantasie, logisch interpreteren en verstandig tellen, juist hanteren van ordeningsschema's, alle hun deel hebben.

Zo wordt het ruimtelijk denken, bij verschillende personen oneindig gevarieerd van aard, tot ontwikkeling gebracht.

Ieder trachte voor zich zelf eens na te gaan, welk aandeel de spontane voorstelling en welk aandeel logische deductie heeft in het uit het hoofd tekenen van een regelmatig viervlak, zesvlak, achtvlak, twaalfvlak en twintigvlak, en bij de beantwoording van de vraag, in hoeveel delen de ruimte verdeeld wordt door de zes vlakken, waarin de zijvlakken van een kubus liggen.

Ik laat de bewering, dat het meetkundeonderwijs het voorstellingsvermogen bevordert, terzijde, maar blijf van mening, dat ook het onderwijs in de B.M. tot verbetering van de denktechniek onzer leerlingen ten aanzien van drie-dimensionale structuren aanmerkelijk kan bijdragen. Dit denken bestaat immers in het hanteren van ruimtelijke ordeningsschema's, die bij de B.M. bij voortduring aan de orde zijn. Voor de paedagogische psychologie blijft de vraag ter onderzoek, welk aandeel het spontane voorstellen bij het hanteren der ruimtelijke ordeningsschema's heeft.

Zonder twijfel kan het onderwijs in de B.M. bijdragen tot het nauwkeurig, ordelijk en net leren werken. De voortdurende gelegenheid tot contrôle op de juistheid der uitgevoerde constructies geeft aan de beoefenaar van het vak een gevoel van bevrediging. Ik begrijp, dat door allerlei oorzaken in de dagelijkse schoolpraktijk en ook op het eindexamen de nauwkeurigheid, netheid en fraaiheid der gepresteerde tekeningen te wensen over kan laten en dat deze tekorten ons leraren tot zelfbezinning dienen te prikkelen. Dr. Van de Vooren wijst er in zijn brief aan de Secretaris m.i. terecht op, dat in verband met bij oud-leerlingen geconstateerde tekorten op ons V.HM.O. hier stellig een taak rust.

Een handicap voor het constructieve deel van ons meetkundeonderwijs is het ongetwijfeld, dat de leraren bij hun opleiding tot leraar tot dit deel van hun taak vaak wel zeer onvoldoende zijn voorbereid. Dit verklaart dan weer, dat ze later vaak voor dit deel van het onderwijs een geringere waardering hebben, dan m.i. wenselijk is te achten.

Men kan doctor in de Wis- en Natuurkunde worden zonder behoorlijk met tekenmateriaal te kunnen omgaan; of dit erg is, laat ik gaarne aan anderen ter beoordeling over. Men kan ook wiskunde-leraar worden met hetzelfde tekort in zijn vorming, ja, zelfs zonder ooit een beschrijvende meetkunde-figuur te hebben

geconstrueerd. Dit lijkt me voor ons onderwijs een groot bezwaar, waaraan tegemoet gekomen kan en moet worden.

Het is ongetwijfeld gewenst, dat er een nauwer contact komt tussen het Lijntekenen en de B.M., zoals dat reeds 20 jaren geleden door de Commissie Beth-Dijksterhuis is gepropageerd.

Hoofddoel van het lijntekenen zij: het verlenen van gelegenheid tot oefening in meetkundige constructies.

In elk der klassen III, IV en V worde één uur verplicht lijntekenen gegeven.

Bij de opleiding van thans zal dit uur niet of althans zelden door de wiskundeleraar kunnen worden gegeven.

Het nut van het vak B.M. blijft niet beperkt tot dat van technisch construeren.

In de eerste plaats verlieze men niet uit het oog, dat de opgaven der B.M. een uitgebreid gebied van toepassingen geven voor wat in de Stereometrie wordt geleerd.

Voorts worden de leerlingen gedwongen tot het maken van Stereometrische hulpfiguren, om het probleem, waar ze voorgezet zijn, behoorlijk te kunnen begrijpen.

Maar ook verder gelden de voordelen van het overige meetkunde onderwijs voor het onderwijs in de B.M., zij het niet steeds in gelijke mate, zoals uit de volgende toelichting moge blijken.

a) Ook bij het onderwijs in de B.M. is er gelegenheid meetkundige eigenschappen te ontdekken.

Voorbeeld: De affiene verwantschap tussen de eerste en de tweede projectie.

b) Het verrassend element, dat kan leiden tot mathematische bezinning, komt ook hier voor.

Voorbeeld: de eigenschaduw op de mantels van een cylinder en een erop passende kegel sluiten niet aaneen.

c) Het construeren is niet louter een technisch probleem; evenals bij het overige meetkunde-onderwijs moet de leerling een keuze leren doen uit verschillende oplossingsmogelijkheden.

Bv. bij het tekenen van een regelmatig achtvlak met een zijvlak rustend op het horizontale projectievlak.

d) Het maken van constructies in de B.M. versterkt de leerling in zijn critische houding t.a.v. eigen werk, wat ook van waarde is bij het overige onderwijs.

De critische houding wordt bevorderd door de mogelijkheden van veelzijdige contrôle bij de constructies der B.M.

e) Bij discussies over B.M.-constructies kan men normale wiskundige redeneringen plaatsen.

Voorbeeld: Construeer door een gegeven punt P een lijn, die met de projectievlakken voorgeschreven hoeken α en β maakt. Discussie: $\alpha + \beta \leqq 90°$.

f) De leraar, die aan het wiskundig inzicht tegenover de technische vaardigheid meer relief wenst te geven, kan dit doel o.m. bereiken door zijn leerlingen de gegevens voor elk vraagstuk zelf te laten kiezen, in plaats van deze door coördinaten vast te leggen.

g) Het maken van de tekening en het ontstaan van een juist inzicht gaan vaak hand in hand.

Voorbeeld: Beschouw de doorsnede en de somfiguur van twee in één kubus geplaatste viervlakken met oppervlaksdiagonalen als ribben, en onderzoek het aantal hoekpunten, ribben en zijvlakken van deze nieuwe figuren.

§ 5. *Welke zijn de gevolgen van de afschaffing van B.M. als afzonderlijk leervak?*

Ik onderscheid twee gevallen:

a) afschaffing, ten einde het constructief element in het M.O. beter tot zijn recht te doen komen;

b) afschaffing, teneinde dit constructief element terug te dringen.

De onder *a*) bedoelde afschaffing is op didactische en methodische gronden uitstekend te verdedigen; ik kan verwijzen naar de verslagen van de Commissie Beth-Dijksterhuis. Wordt er gezorgd voor een nauwgezette leerstofomschrijving en voor behoorlijke eindexameneisen, dan behoeven we van deze samenkoppeling geen nadelige gevolgen te vrezen. Mits niet van officiële zijde alle paedagogische voordelen van de combinatie teniet worden gedaan door een besnoeiing van het aan de gehele wiskunde toegemeten urenaantal.

De ervaringen der laatste jaren maken me iet of wat sceptisch. Wat leert ons nl. de geschiedenis?

Voor de invoering van het normaalprogram op de H.B.S. kon men de urenverdeling 7.7.7 over de klassen 1, 2, 3 als normaal beschouwen. In 1916 werd dat 7.6.6. In 1920: 6,6,6. In 1937: 6,5,5, en in 1941: 5,5,5.

Ik beschouw deze stelselmatige achteruitgang van het aantal uren voor wiskunde als een symptoom van de geringere waardering, die het vak wiskunde thans geniet vergeleken bij vroeger.

Met deze tendens tot urenvermindering gaat gepaard een tendens tot combinatie van vakken. Of deze toe te juichen is hangt niet

alleen af van de motieven, waarmee ze verdedigd kan worden, maar ook in niet mindere mate van de doeleinden, die men met die combinatie wil bereiken.

In 1920 stonden op het H.B.S.-program Rekenkunde en Stelkunde als afzonderlijke vakken; in 1937 werd het één vak: Reken- en Stelkunde.

Het paedagogisch effect van deze centratie ging volkomen verloren, doordat onmiddellijk in de tweede klasse 1 uur wiskunde werd geamputeerd en even later ook één uur in de eerste klasse, waardoor er in de beide laagste klassen een urenvermindering van minstens 25 % voor reken- en stelkunde ontstond, die tot gevolg had, dat er na de wijziging van de gezamenlijke vakken minder terecht kon komen dan ervoor.

Iets soortgelijks dreigt er bij de Mechanica en Natuurkunde.

Wie niet met deze amputatiedrang in Overheidskringen rekening houdt, loopt gevaar het vak, dat hij lief heeft met de beste bedoelingen, toch schade toe te brengen.

Men make zich generlei illusies.

De laatste vraag uit de brief van Inspecteur De Bruyn luidt: „Gezien het feit, dat de H.B.S.-er de analytische meetkunde kan missen en de Gymnasiast de beschrijvende meetkunde, zou er dan geen reden zijn om beide vakken bij Gymnasium en H.B.S. af te schaffen om op die wijze tenminste aan de veelgesmade overlading een heel klein beetje tegemoet te komen?"

Uit deze vraag blijkt, hoe reëel het gevaar is dat, mocht de aanslag op de B.M. gelukken, de vrijgekomen uren geenszins aan de A.M. of aan andere wiskundige scholing ten goede zouden komen, maar eenvoudig van het totale urenaantal zullen worden afgetrokken.

Uit wat ik gezegd heb over de betekenis, die het onderwijs in de B.M., voor ons meetkundig-onderwijs kan hebben blijkt reeds voldoende, welke nadelige gevolgen voor dit onderwijs ik vrees, als men de B.M. zou wensen af te schaffen met de bedoeling het constructief element in de meetkunde terug te dringen.

Ik recapituleer en vul aan:

1. Een gevolg zou zijn: achteruitgang van de technische prestaties op het gebied der constructies.

Reeds geruime tijd is er in ons onderwijs een tendens merkbaar tot geringere appreciatie van de technische vaardigheid. Er zijn zelfs hoogleraren, die een zekere minachting voor technische vaardigheid menen te kunnen constateren (Zie: Bremekamp, Euclides XVII, blz. 184; vergelijk ook de uitlatingen van Rutgers en

Van de Vooren in de brief aan de Heer Jacobs). Het lijkt me toe, dat de generatie van thans t.a.v. zorgvuldigheid bij het werken, nauwgezetheid en technisch kunnen stellig achterstaat bij de generatie, die aan ons voorafging. Deze achteruitgang in appreciatie blijft niet beperkt tot het terrein der wiskunde; men constateert ze ook op taalgebied. De klachten over een slechte verzorging van de spelling zijn internationaal. Ik ben van mening, dat ons V.H.M.O. hier zeker aandacht aan dient te schenken.

2. Afschaffing van de B.M. betekent het wegvallen van één der middelen tot verbetering der denktechniek.

3. Verwaarlozing van de constructies heeft bezwaren voor hen, die na de H.B.S. een technisch beroep kiezen, ook voor hen, die in Delft gaan studeren, maar misschien nog het meest voor hen, die bij hun universitaire studie de technische achterstand nooit zullen inhalen.

4. Het is ongewenst genoegen te nemen met het niveau, waartoe het Gymnasium de leerlingen bij het construeren kan brengen; de een of andere projectiemethode dient bij het meetkundig onderwijs niet alleen genoemd en gekarakteriseerd, maar ook beoefend te worden.

5. Een genoegen nemen met omschrijvingen zonder daadwerkelijke uitvoering der constructies kan leiden tot een superioriteitsgevoel van hem, die alleen maar „zegt", hoe het moet, ten opzichte van hem, die het „doet". Dit lijkt me paedagogisch ongewenst.

6. Het lijkt me een illusie voor afschaffing van de B.M. te strijden in de verwachting dat deze B.M.-uren wel bij de Analytische Meetkunde gevoegd zullen worden. De vrijgekomen uren lopen groot gevaar voor alle wiskundige scholing verloren te gaan.

7. Afschaffing van de B.M. zal door een grote meerderheid van hen, die les in dit vak geven, worden betreurd, omdat in hun oog het meetkunde-onderwijs er schade door zal lijden. Van het meetkunde-onderwijs zou een torso worden gemaakt.

Tegenstanders van de B.M. (ik heb de indruk dat deze naar verhouding meer op het Gymnasium dan op de H.B.S. te vinden zijn) dienen zich geen illusie te maken over de omvang van de tegenzin, die er op de H.B.S. t.a.v. de B.M. zou bestaan.

Volgens de voorlopige bewerking van de enquête-Bunt is 80 % van de leraren vóór de handhaving van de B.M. als afzonderlijk vak en 20 % voor onderbrenging bij de Stereometrie. En tot deze laatste groep behoren ook nog collega's, die bij deze onderbrenging aan de constructieve meetkunde het volle pond willen blijven geven!

Prof. Bottema schrijft me:

„Ik heb de indruk, dat de meeste van mijn wiskunde-collega's hier, zo niet alle, een afschaffing of vermindering van het vak op de H.B.S. zeer zouden betreuren. Persoonlijk zou ik dat zeker en voor een vervanging door Analytische Meetkunde zou ik weinig voelen. Er is daar een groot gevaar (dat wij hier bij de propaedeuse ook ervaren), dat men door de berekeningen afgeleid wordt van het begrip en het natuurlijke meetkundige inzicht".

Prof. Rutgers verklaart in zijn antwoord aan onze Secretaris, dat de Werkgroep z.i. een bedenkelijke kant uitgaat bij de plannen t.a.v. het Algebra-onderwijs. Ik hoop, dat dit t.a.v. het Meetkunde-onderwijs niet gezegd zal kunnen worden.

Moge de Werkgroep de negatieve leuze „weg met de B.M." nimmer tot de hare maken en moge ze erin slagen aan de constructieve meetkunde de haar toekomende plaats te geven in het wiskundeprogram, dat ze bezig is te ontwerpen.

DE MEETKUNDE IN DE EERSTE KLASSE

door

S. J. GEURSEN.

Velen, die er mede te maken hebben, zijn van oordeel, dat het onderwijs in de meetkunde in de eerste klasse van onze scholen voor V.H.M.O. met vrij veel moeilijkheden gepaard gaat. Dat geldt wel bijzonder voor de eerste helft van dat jaar, hetgeen echter niet zelden beslissend is voor de verdere toekomst.

Ervaren leraren, psychologen, didactici en andere deskundigen geven goede redenen daarvoor op, waarvan een paar hier mogen worden aangehaald.

Voor de 12- à 13-jarige prae-puber doemen ook wel grote moeilijkheden op. Het is bekend, dat deze leeftijd weinig geschikt is voor abstract denken, en de aanhef van de vlakke meetkunde is wel zeer abstract.

Er worden vele termen gebruikt, die aan het dagelijkse leven zijn ontleend, maar die nu ineens een min of meer gewijzigde betekenis krijgen. Boek en leraar drukken zich daarbij zeer precies uit, maar de leerling, die hieraan in het geheel niet gewend is, ontgaat de bedoeling van die nauwkeurigheid. Vele termen gelijken op elkaar, zodat de ongeoefende leerling het verschil niet aanvoelt en ze met elkaar verwart, („evenwijdig zijn" en „gelijk" zijn"; „rechthoek", „vierhoek" en „vierkant" en dergelijke). Met vele volzinnen doet zich hetzelfde voor. Als de leraar het uitlegt, begrijpt de leerling het wel, maar daarom is het begrip voor hem nog niet een vertrouwd, een hanteerbaar begrip geworden en als hij na een paar dagen de stof moet reproduceren, is dat alles weer te vaag geworden. Hoe duidelijk de leraar het ook moge uitleggen, deze zal daarbij toch in voor de leerling snelle opeenvolging de vers aangebrachte begrippen in de vorm van woorden en zinnen moeten gebruiken. De „hoorbetekenis" en de „spreekbetekenis" (Prof. Mannoury, Significa) dekken elkaar nog maar al te vaak niet daarbij.

Het uit elkaar houden van definities en stellingen is een nog veel moeilijker kwestie voor hem. Terwijl ook dit nog niet bezonken is, wordt hem opgedragen uit een of ander vraagstuk het „gegeven" en het „te bewijzen" op te diepen, wat op zichzelf reeds een moeilijke opdracht is. Dan moet hij direct daarop volgens een ketenredene-

ring, die hij in zijn geheel moet overzien, een bewijs „vinden". Er zijn echter psychologen, die beweren, dat kinderen beneden 14 jaar nog niet rijp zijn voor een dergelijke „keten"-redenering, waarbij telkens het ene uit het andere voortvloeit. Deze bewijsvorm wordt bovendien al spoedig afgewisseld met andere vormen als bijvoorbeeld het bewijs uit het ongerijmde. Dit alles geschiedt dan allicht in een te snel tempo, want de leraar moet aan het einde van het jaar klaar komen met een vrij grote hoeveelheid stof.

Vooral in de laatste tijd is er een duidelijk streven merkbaar te trachten aan de bezwaren tegemoet te komen.

De wiskunde-werkgroep van de W.V.O. is op dit gebied zeer actief, terwijl ook ons wiskundig didactisch tijschrift Euclides in dit streven zeker niet achter blijft.

Sommigen willen de psychologie meer dan tot nu toe een woordje mee laten spreken, zodat men naast de algemeen gevolgde „logische" („Euclidische") opvatting van het wiskunde-onderwijs (M. Pasch, Dr. E. J. Dijksterhuis) ook van een psychologische richting (*Study*, Mevr. T. Ehrenfest-Afanassjewa) kan spreken, alsmede van tussenvormen daarvan, waarbij men de „logische" opvatting in principe blijft nastreven, echter rekening houdende met psychologische en didactische bezwaren (Dr. H. Turkstra).

Ook worden er leerboeken geschreven, die een ernstige poging zijn iets te bieden, dat meer op het kind is ingesteld, of die de zaak op een geheel andere manier willen aanpakken.

Daarnaast worden er van verschillende zijden adviezen gegeven, die zeker waard zijn ernstig overwogen en — althans bij wijze van proef — opgevolgd te worden.

Enige denkbeelden, die mogelijk tot verbetering kunnen leiden en die de taak van leerling en leraar beiden misschien kunnen helpen verlichten, mogen hier worden geopperd. Hierbij zij opgemerkt, dat ze volstrekt niet alle oorspronkelijk zijn. Voor zover het schrijver dezes bekend is, dat anderen zich in min of meer dezelfde geest hebben uitgelaten, zijn de namen tussen haakjes er bij vermeld.

Het voorgestelde kan met handhaving van de thans voorgeschreven en gebruikelijke stof en met handhaving van elk willekeurig leer- en vraagstukkenboek (op misschien een enkele uitzondering na) toegepast worden.

1. Door korte, thuis liefst schriftelijk te beantwoorden vragen, die daarna pas op school worden besproken, kan men de aandacht

van de leerling vestigen op het verschil in betekenis tussen een bepaalde *wiskundige vakterm* en de overeenkomstige *term in de omgangstaal.* Bijv.: Wat bedoelt men in de omgangstaal, als men zegt „bewijs dat eens", en wat bedoelt men er in de wiskunde mee? Laat gerust de leerling die vraag eens in het gezin opwerpen, liever dan een moeilijke som. Het gaat niet zozeer om het juiste antwoord als wel om de discussie, waardoor bedoeld verschil bewust gemaakt wordt (Prof. Mannoury, Significa, Dr. H. Turkstra, Dr. H Mooy).

2. In de plaats van als huiswerk op te geven „leer die en die paragraaf" of daarnaast kan men opdragen bepaalde stellingen, definities enz. in het boek op te zoeken en in andere bewoordingen schriftelijk weer te geven (Dr. J. H. Wansink).

3. Om het verschil tussen definities en stellingen goed te doen uitkomen, kan men *voorlopig* vaststaande redactie-vormen voorschrijven, die geen verwarring kunnen geven, bijv.: definities moeten deze gedaante hebben:

„Onder een . . . verstaat men een . . ."

en stellingen deze:

„Als . . ., dan . . .".

De thans veel voorkomende vorm:

„Een . . . is een . . .", die zich zowel bij definities als bij stellingen kan voordoen, zou dan voorlopig moeten worden vermeden.

Het is m.i. gelukkig, dat de meeste leerboeken iets dergelijks niet doen. Zij geven nu een prachtige gelegenheid tot oefeningen in het omzetten van zinnen.

4. De redactie-vorm van een stelling:

„Als . . ., dan . . ."

heeft bovendien het voordeel, dat de oorzaak eerst genoemd wordt en daarna het gevolg, hetgeen in overeenstemming is met het causaliteitsprincipe. Deze vorm moet dus voor de leerling gemakkelijker te verteren zijn.

Men bedenke, dat bij woorden als „want", „omdat", „daarom", „dus", „aangezien" het een kind van 12—13 jaar niet zo heel helder voor de geest staat, welke van deze een „voortgaand" en welke een „teruggaand" causaal verband leggen.

5. Het is zeer nuttig, zo niet noodzakelijk een gedemonstreerd of gezamenlijk gevonden bewijs in de klasse nog eens in kortere vorm te herhalen, het samen te vatten, het essentiële er uit naar voren te brengen of het bewijs schematisch weer te geven. De leerling kan anders de gehele „keten" niet overzien. (Prof. G. Mannoury, Prof. M. Minnaert, Dr. H. Mooy). Liefst geschiede

dat met zo weinig mogelijk, als het kan geheel zonder letters in de figuur, doch met merktekentjes en dergelijke.

6. Van een nieuw type van vraagstuk behandele men op het bord niet één maar twee of drie voorbeelden *zonder opklimming in moeilijkheid.* De volgende les zal men daar plezier van hebben.

7. Moeilijke bewijzen kunnen m.i. zonder bezwaar enige maanden of tot het einde van het cursusjaar worden uitgesteld. Men heeft een behoorlijke kans, dat dan de stof heel wat beter verteerd wordt (Dr. J. G. Vogel wil in de natuurkunde ook niet alles bewijzen).

8. Zolang het synthetische bewijs (de „keten-redenering") niet een vertrouwd begrip is geworden, valle men de leerlingen niet lastig met andere bewijsmethoden als bewijzen uit het ongerijmde, identiteitsbewijzen en dergelijke, om van meetkundige plaatsen maar niet te spreken.

Later kan men met voordeel enige overgeslagen bewijzen van een andere soort, bijv. bewijzen uit het ongerijmde tegelijkertijd onderhanden nemen.

9. Voorts kan men de volgende onderwerpen met een zo groot mogelijke tussenruimte van tijd (in ieder geval ettelijke lessen) één voor één aan de orde laten komen (hetzij in deze of in een andere volgorde):

a. de definitie (met vele voorbeelden);
b. het axioma (met meer dan één voorbeeld);
c. het postulaat (bij het construeren);
d. het „gegeven" en het „te bewijzen" (op te zoeken uit een vrij groot aantal stellingen en vraagstukken);
e. het bewijs (bij dezelfde stellingen en vraagstukken).

Deze zo moeilijke en abstracte onderwerpen worden dan zeer geleidelijk behandeld.

De tussenliggende lessen kan men zeer goed vullen met teken- en constructiewerk; deze lichtere, maar toch ook belangrijke leerstof geeft dan tevens enige verademing.

10. Het is gewenst de leerling een scherp onderscheid te doen maken tussen construeren (met passer en liniaal) en tekenen (met *elk* dienstbaar geacht hulpmiddel). Het construeren kan niet nauwkeurig genoeg verlangd worden. Het tekenen kan daarnaast niet worden gemist. Afmetingen van lijnen en hoeken moeten hier „ongeveer" juist zijn.

Het behoeft geen betoog, dat er veel geconstrueerd en getekend behoort te worden, vooral in het begin.

De bewijzen van constructies kunnen zeer wel voorlopig worden uitgesteld.

11. Het is m.i. noodzakelijk de leerlingen uitdrukkelijk vraagstukken te leren „lezen". Dit kan o.a. geschieden bij de behandeling van de stof sub 9d.

12. De ervaring heeft mij geleerd, dat men bij een handelwijze als onder 1—11 aangegeven in het algemeen geen haast behoeft te maken en toch vlugger opschiet en betere resultaten boekt.

Vreest men niettemin niet tijdig door de stof heen te komen, dan kan men zonder bezwaar alle stof over ongelijkheden $(a+b) > c$, grotere zijde, grotere hoek),enz. uitstellen tot het laatste gedeelte van het jaar. Deze stof is minder belangrijk dan de andere en komt dus op de tweede plaats.

De voorstanders van de z.g. doe-school vinden op deze wijze hun wensen in menig opzicht bevredigd (punten 1, 2, 10 en 11).

Tenslotte zij opgemerkt, dat, wil men met het bovenstaande kans op succes maken, de genoemde punten niet te hooi en te gras maar systematisch zullen moeten worden toegepast.

Het bovenstaande moge worden beschouwd als een der vele pogingen tot verbetering (Dr. Van der Harst heeft ergens gezegd blij te zijn met elke vondst, die het onderwijs wat beter doet lopen). Ik zou het op prijs stellen inzichten en ervaringen van anderen op dit gebied eveneens te zien gepubliceerd.

VACANTIE-CURSUS GROEPENTHEORIE

25, 26, 27 Augustus 1949, in een der lokalen van de laboratoria
De Lairessestraat 174, Amsterdam Zuid.

PROGRAMMA

Donderdag 25 Augustus

14	u.	Prof. dr C. Visser	Inleidende voordracht;
15.30	u.	Dr F. van der Blij	Idem.

Vrijdag 26 Augustus

9.30	u.	Prof. dr C. Visser	Inleidende voordracht;
11	u.	Prof. dr J. de Groot	„De fundamentaalgroep in de topologie";
14	u.	Prof. dr H. Freudenthal	„De fundamentele begrippen van de theorie der continue groepen";
15.30	u.	Dr C. J. Bouwkamp	„Groepentheorie en Natuurkunde".

Zaterdag 27 Augustus

9.30	u.	T. A. Springer	„Groepentheorie en Getallenleer";
11	u.	Prof. dr F. Loonstra	„Geordende groepen".

De juiste titels der inleidende voordrachten kunnen nog niet worden medegedeeld; evenmin een meer concrete opgave van de inhoud der andere voordrachten. De sprekers streven er echter naar zo elementair en helder mogelijk te zijn. Na iedere voordracht discussie en pauze.

De kosten bedragen *f* 2.50, welk bedrag kan worden overgemaakt op postgirorekening 462890 van het Mathematisch Centrum.

Aanmelding Mathematisch Centrum, Amsterdam Oost, Tweede Boerhaavestraat 49.

BOEKBESPREKING.

Dr E. W. Beth, Natuurphilosophie, Noorduyn, Gorinchem 1948, 230 pp.

Prof. Beth, die bij een groter publiek dan dat van de zuivere philosophen vooral bekend is door zijn „Wijsbegeerte der Wiskunde" heeft thans voor deze wijdere lezerskring een overzicht geschreven van philosophische beschouwingen over de natuurwetenschappen.

Hoewel de voornaamste bedoeling van de schrijver is een inzicht te geven in de wijze, waarop naar zijn mening moderne methoden in staat stellen de natuurphilosophie te bedrijven, weet hij tegelijkertijd duidelijke en zaakkundige karakteristieken te geven van opvattingen, die in de loop der historie in zwang geweest zijn op dit gebied. Op gelukkige wijze heeft hij door het gehele boek heen deze twee elementen, eigen opvattingen en oudere systemen, systematisch uiteengezet en gecombineerd.

Als wetenschappelijk philosoof legt prof. Beth de nadruk op het belang van logische analyse. Hij beschouwt de logica vooral als leer van het strenge betoog, zoals hij ook reeds eenmaal kort in de encyclopedie „E.N.S.I.E." duidelijk uiteenzette. Aan de hand van de logica der beweringen worden de eenvoudigste begrippen van de symbolische logica verklaard en zoals gebruikelijk onderscheiden in een algorithmus (tekens en „syntactische regels" die tekencombinaties vastleggen) en een interpretatie („semantische regels" die betekenis der tekencombinaties vastleggen). Deze hulpmiddelen worden dan aangewend ter bestudering der natuurwetenschappelijke theorieën,, die de schrijver als interpreteerbare algorithmi opvat. Als voorbeeld wordt de quantumtheorie gekozen. Dat hier wegens de grote en fundamentele moeilijkheden, op welke men bij een diepgaande analyse nog stuit, niet meer dan een voorlopige schets gegeven kon worden, spreekt wel vanzelf. De schrijver voelt zich blijkens een later toegevoegd naschrift nog niet geheel zeker van de juistheid zijner indelingen in het logische onderzoek. Door het gebruik van de „matrixmechanische" formulering van de quantumtheorie raakt m.i. het aspect van de „golfmechanische" theorie wat op de achtergrond, terwijl wellicht ook het verschil tussen „eerste" en „tweede" quantisatie niet duidelijk genoeg tot uitdrukking komt.

Zeker niet minder interessant dan de besproken analyse is prof. Beth's historische beschouwing over de logische vormen, die in de natuurwetenschap in gebruik waren of nog zijn. Hij onderkent daarbij twee hoofdrichtingen: enerzijds de eleatische logica, gespecialiseerd en uitgebreid, eerst in de „newtoniaanse" en later in de quantumtheoretische logica, anderszijds de aristotelische of modaliteitslogica. De eerste soort is in wiskunde en astronomie vanouds in gebruik en sedert de moderne geschiedenis ook in de anorganische natuurwetenschappen, de economie en een deel van de biologie; van de tweede soort ziet prof. Beth duidelijke resten in historische, theologische en juridische beschouwingen. Hij merkt op, dat deze soort logica echter in de biologie snel terrein verliest Het komt mij voor, dat ook in de andere genoemde gebieden van een enigszins consequente toepassing der modaliteitslogica nauwelijks meer sprake is. Overigens heeft de schrijver ook duidelijk critiek op huidige voorstanders van het gebruik van een niet langer adequate logica in de natuurkunde: hij toont de zwakheid van een standpunt als dat van Hoenen, die (in dezen niet ongelijk aan Lyssenko...) een wetenschappelijk, zowel experimenteel als theoretisch, goed gefundeerd feit ontkent op grond van een philosophisch parti pris. Belangwekkend en helder zijn ook de relaties, die schrijver ziet tussen de anorganische natuurwetenschap en de overige wetenschappen, speciaal zijn beschouwingen omtrent de speculaties over de verhouding tussen analoge begrippen in biologische en anorganische natuurwetenschappen van Bohr en Jordan, al kent schrijver naar mijn smaak wat teveel waarde toe aan de theorieën van laatstgenoemde op dit gebied.

Prof. Beth ziet terecht in de studie van de logische structuren (eventueel slechts van enkele hoofdtrekken) der verschillende wetenschappen het belangrijkste middel om deze te begrijpen en aldus te ontsnappen aan vakspecialisme. Zijn boekje levert hiertoe een zeer bruikbaar overzicht.

S. R. DE GROOT.

INGEKOMEN BOEKEN.

Van P. Noordhoff, Groningen:

Dr P. Molenbroek, *Leerboek der Stereometrie,* **11e druk,** 368 blz., 239 fig., geb. *f* 10.—.

P. Wijdenes, *Wiskunde voor accountants,* I, Algebra, *f* 8.25.

F. Berckenhoff, *Wiskunde voor accountants,* II. Toegepaste Wiskunde, *f* 9.25.

P. Wijdenes, *Beknopte meetkunde II,* **8e druk,** *f* 2.60.

P. Wijdenes, *Beknopte stereometrie,* **4e druk,** *f* 2.50.

P. Wijdenes, *Beknopte driehoeksmeting,* **11e druk,** A *f* 1.25, B *f* 2.15, A + B *f* 3.25.

Van J. B. Wolters, Groningen:

Dr. A. van Thijn, *Leerboek der Stereometrie,* **18e druk,** *f* 3.05.

Ir. G. L. Ludolph en Ir. A. P. Potma, *Theoretische mechanica voor het T.O. en zelfstudie,* **7e druk,** *f* 4.25.

bovendien:

Normaalblad N 360 van de Hoofdcommissie voor de normalisatie in Nederland; bevattende:

Symbolen voor wettelijke tijdseenheden, te weten tijdstip, dag, etmaal, week, maand, jaar, datum, tijdvak.

Adres C.N.B. Lange Houtstraat 13*a*, Den Haag.

INHOUD VAN DE 24e JAARGANG 1948/49.

Officiële mededelingen van Wimecos 1, 138, 186
Jaarvergadering L.I.W.E.N.A.G.E.L. 199
Mathematisch centrum 48,
Thomas Stieltjes 54
Werkgroep W.V.O.. . . . . 56, 81
Van de personen 57, 254
Symposium over moderne rekenmachines. 203
Circulatie van tijdschriften 263

Prof. Dr H. Freudenthal, Hoe hebben de ouden gerekend? 12
(Zie Dr. Bruins, blz. 169).
Dr K. Cuypers, Rond een oude psychologische strijdvraag 35
Dr K. Cuypers, Ordinaalconcept en nominalisatie in de theoretische rekenkunde 41
Dr. H. J. E. Beth, Een meetkundige plaats met een historische betekenis. 58
Dr. F. van der Blij, Uit een school-boek der Wijnroeyeryen met aenhangh genoemt den Bril voor de Amsterdamsche Belachelijcke Geometristen 65
Dr L. N. H. Bunt, De keuze van de leerstof bij het onderwijs in de wiskunde 83
Prof. Dr A. Freudenthal, De algebraische en de analytische visie op het getalbegrip in de elementaire wiskunde . . 106
P. M. van Hiele, Een poging om de richtlijnen op te stellen voor een didactiek van de wiskunde. 122
Dr E. J. Dijksterhuis, Simon Stevin 142
Dr A. G. Ploeg, Levensverzekeringwiskunde. 156
Dr E. M. Bruins, Hoe hebben de ouden gerekend? 169
(Zie Prof. Freudenthal, blz. 12)
Prof. Dr J. Tinbergen, Hoofdstukken uit de wiskunde van belang voor de economische wetenschap 195
Dr F. van der Blij, Compositie en constructie 208
Prof. Dr F. Loonstra, Het begrip orde, in het bijzonder in de wiskunde 226
Prof. Dr J. de Groot, Fantasie van punt tot punt . . . 243
Prof. Dr J. A. Schouten, Over de wisselwerking tussen wiskunde en physica in de laatste 40 jaren 265

P. Wijdenes, De ongelijkheden in de schoolmeetkunde . . 283
Dr Joh. H. Wansink, Plaats en betekenis van het onderwijs in de beschrijvende meetkunde op de H.B.S. 295
S. J. Geursen, De meetkunde in de eerste klasse 307

Korrels.

XC. G. Postma, Over de stelling van Pythagoras . . 135
XCI. Ir. D. Postma, Een weinig bekende projectie van de kubus 136
XCII. Dr L. Kuipers, Een physische slinger 255
XCIII. M. G. Beumer, Het vraagstuk van Réaumur . . 256

Normaalblad voor de Beschrijvende meetkunde. 140
Boekbesprekingen 79, 134, 186, 258, 313
Ingekomen boeken. 193, 262

Portretten van Prof. Dr J. de Groot en Prof. Dr F. Loonstra.